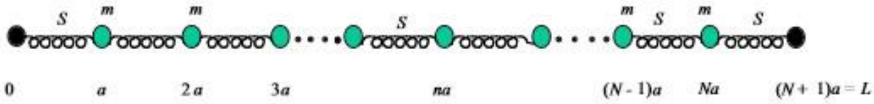
Теоретическая задача 1

Колебания линейной кристаллической решетки

Перевод на русский: Ольга Слинько

Большое число N одинаковых подвижных точечных частиц (N>>1), каждая массы m, располагаются прямой цепочкой с N+1 одинаковыми невесомыми пружинами жесткости (коэффициент упругости) S, связывающие частицы друг с другом и с двумя дополнительными неподвижными частицами (см. рис.). Эта цепочка служит моделью колебательных мод одномерного кристалла. При движении цепочки ее продольные колебания могут быть рассмотрены как суперпозиция элементарных колебаний (мод), каждое со своей характеристической частотой.



(a) Запишите уравнение движения n-ой частицы. [0.7 балла]

(b) Попробуйте найти решение уравнения движения (a) в виде

$$X_n(\omega) = A\sin nka\cos(\omega t + \alpha),$$

Где $X_n(\omega)$ –смещение n-ой частицы от положения равновесия, ω – угловая частота колебательной моды, A, k и α – это константы. k и ω – это волновое число и частота моды соответственно. Каждому k соответствует своя частота ω. Найдите зависимость ω от k, возможные значения k и максимальное значение ω. Колебание цепи – это суперпозиция всех этих колебательных мод.

Формулы, которые могут вам понадобиться:

$(\mathrm{d}/\mathrm{dx})\cos\alpha x = -\alpha\sin\alpha x$, $(\mathrm{d}/\mathrm{dx})\sin\alpha x = \cos\alpha x$, $\alpha = constant$.

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B, \qquad \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

[2.2 балла]

По формуле Планка энергия фотона с частотой ω равна $\hbar\omega$, где $\hbar$ - постоянная Планка, деленная на 2π. Эйнштейн, оттолкнувшись от этого, предположил, что определенная колебательная мода кристалла с частотой ω имеет такую же энергию. Обратите внимание, что колебательная мода – это не частица, а элементарное колебание всей цепи. Эта колебательная мода – аналог фотона – называется фононом. Мы проследим последствия этой идеи в продолжении задачи. Предположим, кристалл состоит из очень большого ($\sim 10^{23}$) числа частиц, расположенный в прямой цепочке.

(c)Для определенной возможной частоты ω (или k) может не быть ни одного фонона, может быть один, два или любое другое число. Поэтому имеет смысл расчет *средней энергии* $<E(\omega)>$ конкретной моды с частотой ω. Пусть $P_p(\omega)$ показывает вероятность существования p фононов с частотой ω. Тогда искомая средняя энергия равна

$$< E(\omega) >= \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}.$$

Несмотря на то что фононы дискретны, их так много (вероятность P_p очень мала для больших p), что мы можем расширить суммы до $p = \infty$ с незначительной ошибкой. Тогда вероятность P_p выражается формулой Больцмана:

$$P_p(\omega) \propto \exp\left(-\frac{p\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

Где k_B – константа Больцмана, T – абсолютная температура кристалла, предполагаемая постоянной. Коэффициент пропорциональности в формуле не зависит от p. Рассчитайте среднюю энергию фононов с частотой ω. Возможно, понадобится формула : $(\mathrm{d}/\mathrm{dx})\, e^{f(x)} = (\mathrm{d}f/\mathrm{dx})e^{f(x)}$.
[2 балла]

(d) Теперь мы хотим рассчитать полную энергию E_T кристалла. В пункте (c) мы нашли среднюю энергию $<E(\omega)>$ колебательной моды с частотой ω. Чтобы найти E_T необходимо умножить $<E(\omega)>$ на количество мод кристалла на единицу частоты и затем просуммировать их по всем частотам от $\omega = 0$ до ω_{max}. Выберите промежуток Δk для волновых чисел. Для большого N и для Δk много больше разницы между соседними (разрешенными) волновыми числами, какое количество мод находится в интервале Δk ?
[1 балл]

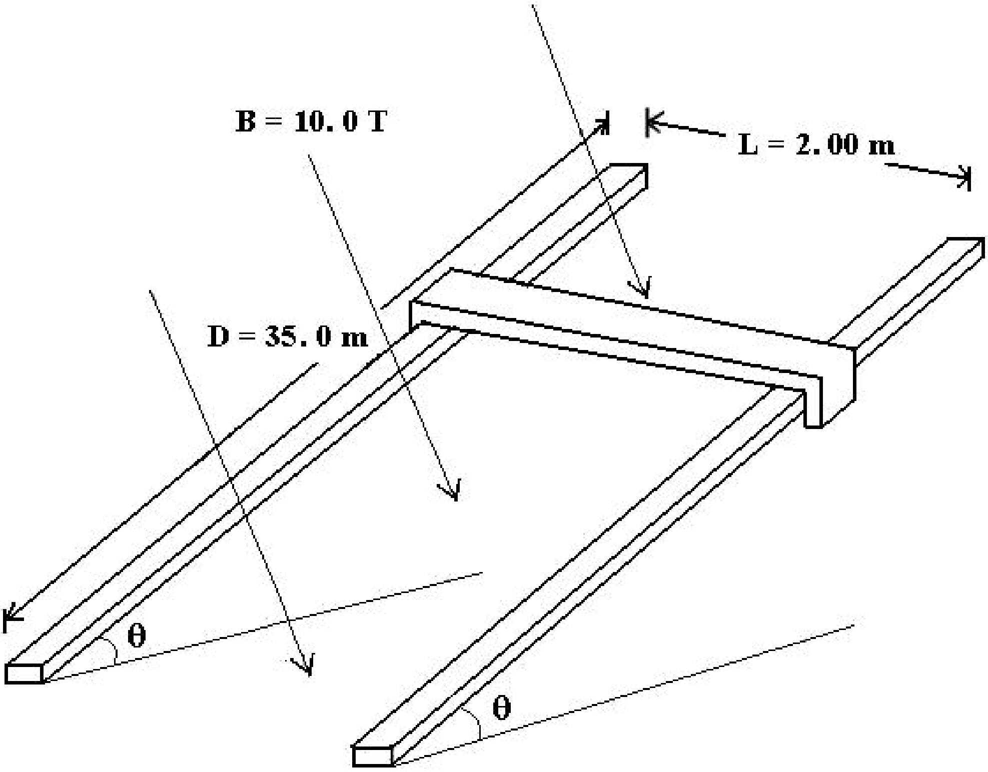
(e) Чтобы использовать результаты пунктов (a) и (b), аппроксимируйте Δk как $(\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}\omega$ и замените любую сумму на интеграл по ω (Здесь удобнее пользоваться переменной ω вместо k). Определите полное число колебательных мод кристалла в этом приближении. Выведите выражение для E_T, но не производите вычисления. Может быть полезным следующий интеграл : $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2} = \pi/2$. [2.2 балла]

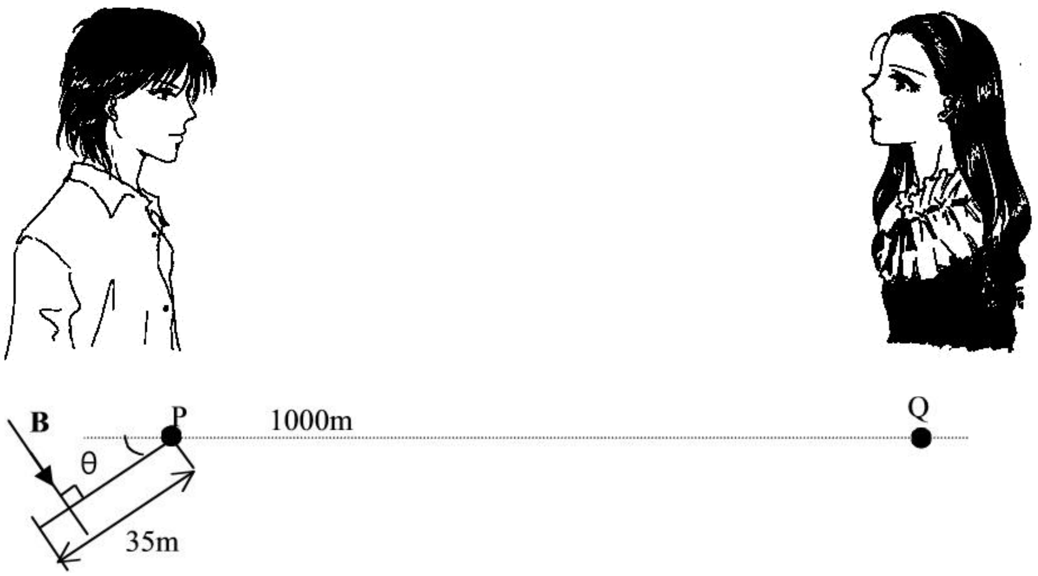
(f) Молярная теплоемкость C_v кристалла при постоянном объеме можно измерить экспериментально : $C_v = \mathrm{d}E_T/\mathrm{d}T$ (T – абсолютная температура). Для рассматриваемого кристалла определите зависимость C_v от T при очень высоких и очень низких температурах. (Например, константа, линейная или степенная зависимость). Нарисуйте качественную зависимость C_v от T, показав полученные зависимости при очень низких и высоких температурах. [1.9 балла]

Теоретическая задача 2
Рельсотрон

Перевод на русский: Ольга Слинько

Юноша, находящийся в точке P и девушка в точке Q любили друг друга. Эти точки разделены проливом шириной 1000 м. После изучения теории рельсотрона юноша не мог удержаться, чтобы не построить подобное приспособление, чтобы перебросить себя через пролив в точку Q. Он сконструировал наклонную плоскость с регулируемым углом наклона θ, на которую положил два параллельных металлических рельса (длина каждого рельса равна D = 35.0 м) на расстоянии L = 2.00 м друг от друга. Он подключил источник постоянного тока с напряжением 2424 В к концам рельсов. Проводящий стержень может свободно перемещаться по металлическим рельсам так, чтобы юноша мог безопасно держаться за него во время движения.
Опытный инженер, тронутый его стараниями, сконструировал систему, создающую магнитное поле B = 10.0 Тл, которое может быть направлено перпендикулярно плоскости рельсов. Масса юноши 70 кг. Масса проводящего стержня 10 кг и его сопротивление
R = 1.0 Ω.





Как только он закончил постройку конструкции и проверил, что она правильно работает, ему позвонила девушка и, рыдая, сказала, что ее отец выдаст ее замуж за богатого мужчину, если юноша не прибудет в Q в течение 11 секунд после звонка. Сказав это, она повесила трубку.

Юноша сразу же приступил к действиям и запустил себя через пролив в Q.

Покажите, используя приведенные ниже шаги, мог ли он успеть вовремя и, если да, под каким углом θ необходимо установить склон?

(a) Выведите выражение для ускорения юноши вдоль рельсов.

(b) Получите выражение, зависящее от θ для времени, проведенного

1. На рельсах, t_s и
2. В полете, t_f

(c) Постройте график зависимости полного времени $T = t_s + t_f$ от угла наклона θ.

(d) Учитывая характеристики конструкции, определите диапазон углов наклона, которые ему следует установить.

Примите следующие допущения:

1) Время между концом звонка и всеми приготовлениями (такими как установка нужного угла наклона плоскости) пренебрежимо мало. То есть можно считать, что запуск произошел в момент времени $t = 0$, когда стержень (и молодой человек, держащийся за него) начал движение.
2) Юноша может начать движение с любой точки вдоль металлических рельсов.
3) Более высокий край плоскости и Q находятся на одной высоте, и расстояние между ними равно $w = 1000$ м.
4) Не рассматривайте вопросы безопасности, например, приземление, электрический шок и т.д.
5) Сопротивление металлических рельсов, внутреннее сопротивление источника тока, трение между проводящим стержнем и рельсами и сопротивление воздуха пренебрежимо малы.
6) Используйте ускорение свободного падения равное $g = 10$ м/с^2.

Математические примечания :

1. $\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$.
2. Решением уравнения $\frac{dx}{dt} = a + bx$ – является

$$x(t) = \frac{a}{b}(e^{bt} - 1) + x(0)e^{bt}.$$

Теоретическая задача 3
Изготовление пластин

Перевод на русский: Ольга Слинько

Изготовление пластин относится к производству полупроводниковых микросхем из кремния. В современном производстве полупроводников используют более 20 процессов. Мы сконцентрируемся на процессе осаждения тонких пленок.

В процессе изготовления тонкие пленки из различных материалов осаждаются на поверхность кремниевой пластины. Поверхность подложки должны быть очень чистой перед процессом осаждения. Присутствие кислорода и других элементов приведет к образованию загрязненного слоя. Степень загрязнения определяется частотой соударений молекул газа с поверхностью подложки. Пусть количество молекул в единице объема n, тогда частота ударов молекул газа о единицу площади подложки выражается $J = \frac{1}{4} n\bar{v}$, где $\bar{v}$ – средняя скорость молекул газа.

(a) Предполагая, что молекулы газа подчиняются распределению Максвелла-Больцмана,

$$W(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/(2RT)},$$

где $W(v)dv$ – доля молекул , скорости которых лежат в диапазоне от v до $v + dv$, M – молярная масса газа, T – температура газа, R – газовая постоянная, покажите, что средняя скорость молекул газа выражается как

$$\bar{v} = \int_0^\infty v\, W(v)dv = \sqrt{\frac{8RT}{\partial M}}$$

[1.5 балла]

(b) Предполагая, что газы подчиняются модели идеального газа при низких давлениях, P, покажите, что частота соударений задается формулой

$$J = \frac{P}{\sqrt{2\pi\, mkT}},$$

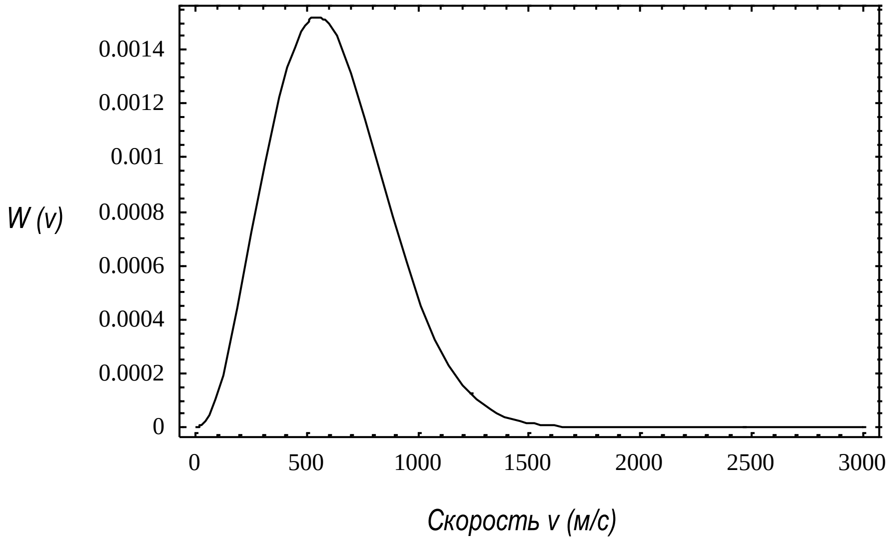
где m – масса молекулы, а T – температура газа.

[1.5 балла]

(c) Если остаточное давление кислорода в вакуумной система 133 Па, и ,приняв за модель молекулы кислорода сферу радиусом приблизительно 3,6 × 10^{-10}м, оцените время, которое требуется, чтобы на подложку осел слой кислорода толщиной в одну молекулу при 300ºC, в предположении, что молекула, ударающаяся о кремниевую подложку оседает на нее. Также предположите, что молекулы кислорода в слое располагаются вплотную.

[1.7 балла]

(d) На практике не все молекулы кислорода взаимодействуют с кремнием. Это можно моделировать с помощью концепции энергии активации, согласно которой для прохождения реакции суммарная энергия реагирующих молекул должна быть выше энергии активации. С физической точки зрения энергия активации описывает тот факт, что для образования связи между кремнием и кислородом должны быть разрушены химические связи между атомами кремния. Положив энергию активации равной 1 эВ, снова оцените время, необходимое для образования слоя кислорода толщиной в одну молекулу при данной температуре. Можете использовать, что площадь под графиком распределения Максвелла из пункта (a) равна единице.



[2.8 баллов]

(e) В процессе литографии, чистая кремниевая подложка равномерно покрывается прозрачным полимерным материалом (фоторезистом) с показателем преломления $\mu = 1.40$. Чтобы измерить толщину фоторезиста, подложка освещается монохроматическим параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 589$ nm. При определенной минимальной толщине фоторезиста, d, возникает разрушающая интерференция отраженного света, при условии падения света под прямым углом к поверхности покрытия. Выведите выражение для связи d, μ и λ. Вычислите d используя приведенные данные. При этом можете считать, что кремний ведет себя как среда с показателем преломления больше 1.40 и можно пренебречь многократным отражением.

Вам может пригодиться следующая информация:
Молярная масса кислорода 32 г/моль.
Константа Больцмана, $k = 1.38 \times 10^{-23}$Дж/К.
Число Авогадро, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Полезная формула:

$$\int x^3 e^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-kx^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{x^2}{k} \right)$$