Теоретическая задача 1

Охлаждение атомов лазерным излучением

В этой задаче Вам предлагается исследовать механизм охлаждения атомов с помощью лазерного излучения. Исследования в данной области привели к значительным успехам в понимании свойств квантовых газов, состоящих из охлажденных атомов, и были отмечены Нобелевскими премиями в 1997 и 2001 годах.

Теоретическое введение

В качестве простой модели рассмотрите двухуровневую модель атома с энергиями основного состояния E_g и возбужденного состояния E_e. Разница энергий $E_g - E_e = \hbar\omega_0$, частота используемого лазерного излучения ω, причем $\delta = \omega - \omega_0 << \omega_0$. Пусть скорости всех атомов $\upsilon << c$, где c – скорость света. Вы можете всегда ограничиться только первыми неисчезающими членами разложения по υ / c и δ / ω_0. Собственная ширина возбужденного уровня E_e равна $\gamma << \omega_0$: для атома в возбужденном состоянии вероятность вернуться в основное состояние в единицу времени равна γ. При этом атом излучает фотон с частотой близкой к ω_0 в случайном направлении.

В квантовой механике показано, что при облучении атома лазером слабой интенсивности вероятность перехода атома из основного состояния в возбужденное в единицу времени зависит от частоты излучения в системе отсчета атома ω_a следующим образом

$$\gamma_p = s_0 \frac{\gamma/2}{1+4(\omega_a-\omega_0)^2/\gamma^2} << \gamma,$$

где $s_0 << 1$ - параметр, зависящий от свойств атомов и интенсивности излучения.

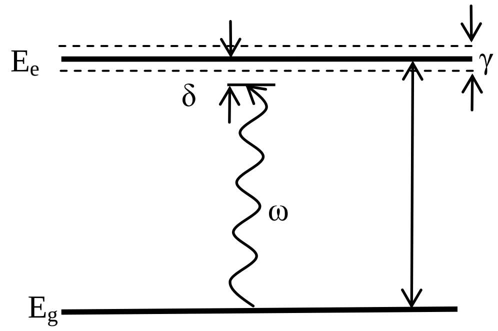

Рис 1. *Обратите внимание на то, что рисунок выполнен не в масштабе.*

В данной задаче свойства газа исследуются пренебрегая взаимодействием между атомами. Интенсивность лазера достаточно маленькая, чтобы количество атомов в возбужденном состоянии было всегда гораздо меньше, чем количество атомов в основном состоянии. Здесь Вы также можете пренебречь эффектами гравитации, которые в реальных экспериментах компенсируются дополнительным магнитным полем.

Численные данные, которые Вам могут понадобиться в задаче:

Постоянная Планка	$\hbar = 1.05\cdot10^{-34}$ J s
Постоянная Больцмана	$k_B = 1.38\cdot10^{-23}$ J K^{-1}
Масса атома натрия	$m = 3.81\cdot10^{-26}$ kg
Частота используемого перехода	$\omega_0 = 2\pi\cdot5.08\cdot10^{14}$ Hz
Ширина возбужденного уровня	$\gamma = 2\pi\cdot9.80\cdot10^{6}$ Hz
Концентрация атомов в газе	$n = 10^{14}$ cm^{-3}

Задание

a)[1 балл] Пусть атом движется в положительном направлении вдоль оси x со скоростью υ_x, а излучение лазера направлено вдоль оси x в отрицательном направлении. Чему равна частота излучения в системе отсчета атома?

b)[2.5 балла] Пусть атом движется вдоль оси x со скоростью υ_x, и при этом его освещают два одинаковых лазера вдоль оси x с разных сторон. Частота излучения лазеров равна ω, параметр интенсивности s_0. Найдите выражение для средней силы $F(\upsilon_x)$, действующей на атом. Для малых υ_x эту силу можно представить в виде $F(\upsilon_x) = -\beta\upsilon_x$. Найдите выражение для β. Каков должен быть знак $\delta = \omega - \omega_0$ для того, чтобы скорость атомов уменьшалась по абсолютной величине?

В дальнейшем будем предполагать, что скорость атомов достаточно маленькая, так что можно пользоваться линейным приближением для средней силы.

c) [1.5 балла] Если вместо двух использовать шесть одинаковых лазеров соответственно вдоль осей x, y и z в положительном и отрицательном направлениях, то при $\beta>0$ на атомы действует диссипативная сила, и их средняя энергия уменьшается. Это означает, что температура, определяемая через среднюю кинетическую энергию, также уменьшается. Используя данное выше значение концентрации атомов, оцените численно температуру T_Q, при которой из-за квантовых эффектов нельзя рассматривать атомы как точечные объекты.

В дальнейшем будем предполагать, что температура газа всегда гораздо больше чем T_Q и используется шесть лазеров вдоль осей x, y и z, как указано в пункте c).

В пункте b) Вы вычислили среднюю силу, действующую на атом. Однако из-за того, что фотоны имеют квантовый характер, в процессе каждого акта поглощения или излучения импульс атома меняется скачками в случайном направлении из-за эффекта отдачи.

d) [0.5 балла] Определите численно среднее квадратичное значение изменения импульса атома $<\Delta p^2>$ из-за одного акта излучения или поглощения фотона.

e) [3.5 балла]Из-за эффекта отдачи, средняя температура атомов через большое время не обращается в нуль, а принимает определенное установившееся значение. Процесс изменения импульса атома можно представить себе как случайное блуждание в пространстве импульсов с средним шагом $\sqrt{<\Delta p^2>}$, и охлаждение из-за диссипативной силы. Установившееся значение температуры определяется совместным эффектом этих двух процессов. Определите установившуюся температуру T_d как функцию γ и δ, считая что она гораздо больше чем $\langle \Delta p^2 \rangle /(2k_B m)$.

f) [1 балл]Найдите численно минимальное возможное значение температуры из-за эффектов отдачи. При каком соотношении δ / γ оно достигается?

Примечание: Если векторные величины $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, … ,$\mathbf{P_n}$ попарно некоррелированы, среднее квадратичное значение $\langle (\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} + \ldots + \mathbf{P_n})^2 \rangle = \mathbf{P_1}^2 + \mathbf{P_2}^2 + \ldots + \mathbf{P_n}^2$

Теоретическая задача 2

Осциллятор с «сухим» трением

Теоретическое введение

При исследовании характера движения механических систем часто удобно использовать воображаемое пространство, по осям которого откладываются координаты и импульсы всех материальных точек системы (или их скорости, т.е. производные от координат по времени), - фазовое пространство. Каждая точка этого воображаемого пространства, называемая изображающей точкой, полностью задает некоторое состояние системы.

При движении механической системы ее изображающая точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую, называемую фазовой траекторией. Направление движения изображающей точки указывается стрелкой на фазовой траектории. Набор всех возможных фазовых траекторий данной системы называют ее фазовым портретом. Анализ этого фазового портрета позволяет выяснить важные качественные особенности движения системы без решения уравнений движения системы в явном виде. В ряде случаев использование фазового пространства является самым адекватным методом рассмотрения и решения проблемы.

В данной задаче мы предлагаем использовать фазовое пространство для анализа различных механических систем с одной степенью свободы, т.е., описываемых только одной координатой. В этом случае фазовое пространство является плоскостью. Фазовые траектории в этом случае – это зависимости импульса точки от ее координаты (или наоборот).

Вопросы

A. Фазовые портреты (3.0)

A1. Нарисуйте качественно фазовую траекторию свободной частицы, движущейся между двумя параллельными упруго отражающими стенками, расположенными в точках с координатами $x = -L/2$ and $x = L/2$. (0.5)

A2. Исследуйте фазовые траектории гармонического осциллятора, т.е. частицы с массой m, на которую действует упругая сила $F = -kx$.

a. Найдите уравнение фазовой траектории и параметры этой траектории? (0.5)

b. Нарисуйте качественно пример фазовой траектории гармонического осциллятора. (0.5)

A3. Рассмотрим точечную частицу массы m, подвешенную на невесомом, абсолютно твердом стержне длинной L в поле тяжести земли. В качестве координаты в этом случае удобно выбирать угол отклонения стержня от вертикали α. В качестве фазовой плоскости можно выбрать плоскость с координатами $(\alpha, d\alpha/dt)$. Исследуйте качественно фазовый портрет этого математического маятника при произвольных углах отклонения α и нарисуйте его. Сколько качественно различных типов K фазовых траекторий существует у этой системы? Найдите условия, которыми определяются эти различные типы фазовых траекторий. (Можно не рассматривать в качестве фазовых траекторий сами точки равновесия) (1.5)

B. Осциллятор с трением скольжения (7.0)

При учете сил сопротивления мы сталкиваемся с двумя различными видами сил трения. В первом случае сила трения зависят от величины скорости – вязкое трение – и описываются выражением $\boldsymbol{F}_{тр} = -\gamma \boldsymbol{v}$. Во втором случае сила трения не зависят от величины скорости, определяются коэффициентом трения $F_{тр} = \mu N$ и направлены против относительной скорости соприкасающихся тел – сила трения скольжения. Первый случай реализуется при движении тела в газах или жидкостях. Второй - при скольжении одного тела по поверхности другого.

В качестве примера второго случая рассмотрите тело на пружине на горизонтальной плоскости с трением. Масса тела равна m, коэффициент упругости пружины равен k, коэффициент трения скольжения тела о плоскость равен μ. Тело движется по прямой линии, которую можно считать осью x (положение тела при $x = 0$ соответствует нерастянутой пружине). В начальный момент тело расположено в точке $x=A_0$ с нулевой скоростью.

B1. Запишите уравнение движения гармонического осциллятора, на который действует сила трения скольжения. (1.0)

B2. Нарисуйте качественно фазовую траекторию. (2.0)

B3. Останавливается ли тело в положении, когда пружина не растянута? Если нет, то какова ширина области, в которой может остановиться тело? (1.0)

B4. Найдите величину изменения максимального отклонения осциллятора в положительном направлении x в течение одного полного колебания ΔA. Найдите также зависимость максимального отклонения от времени A(t). (1.5)

B5. Нарисуйте качественно график зависимости координаты от времени $x(t)$ и оцените число N совершаемых телом колебаний. Какова частота этих колебаний ω_0? (1.5)

Указания:

Уравнение эллипса с центром в начале координат с полуосями a и b имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Задача 3

Данная задача состоит из четырех не взаимосвязанных частей.

A. [2.5 балла] Марианская впадина в Тихом океане имеет глубину $H = 10920\,м$. Плотность воды на поверхности океана $\rho_0 = 1025\,кг/м^3$, модуль всестороннего сжатия воды $K = 2{,}1\cdot 10^9\ Па$, ускорение свободного падения g=$9.81 м/с^2$. Вы можете пренебречь изменением температуры и силы тяжести с глубиной, а также атмосферным давлением.

A1) Как связаны между собой плотность $\rho(x)$ и давление $P(x)$ воды на глубине x ?

A2) Чему равно численное значение давления $P(H)$ на дне Марианской впадины? Вы можете использовать итерационные методы для решения этой части.

Указание: Жидкости обладают очень малой сжимаемостью. Упругие свойства жидкости по отношению к малым изменениям объема характеризуются коэффициентом сжимаемости

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=const}$$

Модуль всестороннего сжатия K является величиной обратной к κ: K=$1/\kappa$.

B. [2.5 балла] Легкий подвижный поршень разделяет теплоизолированный сосуд на две части. В одной находится m_1 = 3 *г* водорода при температуре T_{10} = 300 K, а в другой – m_2 = 16 *г* кислорода при температуре T_{20} = 400 K. Молярные массы водорода и кислорода равны $\mu_1 = 2\,кг/кмоль$ и $\mu_2 = 32\,кг/кмоль$, R=8.31Дж/(K моль). Поршень слабо проводит тепло и температура в сосуде постепенно выравнивается, все процессы происходят квазистатически.

B1) Чему равна равновесная температура T системы?

B2) Чему равно отношение конечного давления P_f к начальному давлению P_i?

B3) Чему равно количество теплоты Q, которое отдаст кислород водороду к моменту, когда поршень перестанет двигаться?

C. [2.5 балла] К двум одинаковым параллельным близко расположенным проводящим пластинам α и β, которые несут заряды –Q и +q (Q> q >0), приближают на расстояние d от пластины β еще одну такую же проводящую пластину γ массы m и имеющую заряд +Q (см. Рис.1). Площади пластин равны S. Затем поднесенную пластину отпускают, продолжая удерживать пластины α и β в неподвижном положении. Считайте, что соударение пластин β и γ абсолютно упругое, краевыми эффектами и влиянием силы тяжести можно пренебречь. Считайте, что в процессе соударения заряд успевает полностью перераспределиться между пластинами β и γ.

C1) Чему равна напряженность электрического поля E_1, в котором двигается пластина γ до соударения с пластиной β ?

C2) Чему равны заряды пластин Q_β и Q_γ после соударения?

C3) Чему равна скорость υ пластины γ после соударения, когда она вновь окажется на расстоянии d от пластины β ?

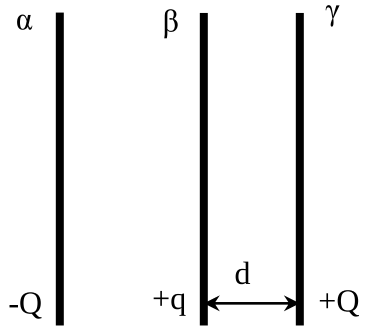

Рис. 1

D. **[2.5 балла]** Две тонкие линзы с оптическими силами D_1 и D_2 находятся на расстоянии $L = 25\,см$ друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система создаёт прямое действительное изображение предмета, расположенного на главной оптической оси со стороны линзы D_1, в натуральную величину (увеличение изображения $\Gamma' = 1$). Если линзы поменять местами, не изменяя положения предмета, то снова получается прямое действительное изображение предмета с увеличением $\Gamma'' = 4$.

D1) Определите типы этих линз. Изобразите взаимное расположение линз и предмета. В листе ответов собирательную линзу обозначьте «+», рассеивающую – «-».

D2) На сколько отличаются оптические силы этих линз $\Delta D = D_1 - D_2$?