

### Условие

Простейший электрический диполь представляет собой систему из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, смещённых друг относительно друга на вектор  $\vec{l}$ , проведённый от отрицательного ( $-q$ ) к положительному заряду ( $+q$ ). Дипольный момент — это векторная величина, равная:

$$\vec{P} = q\vec{l}.$$

Диполь называют точечным (или элементарным), если его размеры малы по сравнению с расстоянием  $r$  до диполя:  $l \ll r$ .

Эксперимент и теория показывают, что картина силовых линий напряжённости  $\vec{E}$  поля электрического точечного диполя  $\vec{P}$  не отличается от картины силовых линий магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного точечного диполя  $\vec{P}_m$  (маленького постоянного магнетика или виточка с током). Это означает, что, получив законы взаимодействия электрических точечных диполей и заменив в формулах  $\vec{P}$  на  $\vec{P}_m$ , а константу электрического взаимодействия  $k_\varepsilon = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$  м/Ф — на константу магнитного взаимодействия  $k_\mu = \mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$  Гн/м, мы сможем рассчитать поля и законы взаимодействия магнитных диполей. Вектор магнитного момента  $\vec{P}_m$  постоянного магнита направлен от южного к северному полюсу (для витка с током это направление соответствует правилу буравчика).

### Магнитный шар

Магнитные моменты неодимовых магнитов в нашей работе не меняются под действием внешнего магнитного поля, то есть являются магнитожёсткими.

Поле неодимового шара радиусом  $R$  на расстояниях  $r \geq R$  совпадает с полем точечного магнитного диполя  $\vec{P}_m$ , равного магнитному моменту шара и расположенного в его центре.

Неодимовые шары взаимодействуют как жёсткие точечные диполи, расположенные в центрах шаров.

### Железный шар в магнитном поле

Железный шар в нашей работе в отсутствие магнитных полей практически не намагничен и, соответственно, не несёт никакого магнитного момента. В магнитном поле он намагничивается, приобретая магнитный момент пропорциональный индукции магнитного поля  $B$ :

$$\vec{P}_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \vec{B} R^3,$$

где  $R$  — радиус шара, а  $\mu$  — магнитная проницаемость железа. В результате возникает взаимодействие между наведённым магнитным моментом шара  $\vec{P}_{\text{ш}}$  и магнитным моментом  $\vec{P}_m$  постоянного магнита.

### Задание

1.1 Снимите зависимость силы  $F(\theta)$  взаимодействия двух неодимовых шаров от угла  $\theta$  между их магнитными моментами с шагом в  $10^\circ$  в двух случаях:

а) магнитный момент  $\vec{P}_m$  одного из шаров (неподвижного) направлен вдоль прямой, соединяющей центры шаров.

б) магнитный момент  $\vec{P}_m$  одного из шаров (неподвижного) перпендикулярен прямой, соединяющей центры шаров.

Опишите установку и методику измерений.

1.2. Постройте зависимости  $F_a(\theta)$  и  $F_b(\theta)$  на одном графике.

1.3. Постройте график  $\gamma(\theta) = F_a(\theta)/F_b(\theta)$ .

2. Получите теоретическое значение отношения  $\gamma(\theta)$  для значений  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ .

3. Определите максимальную силу  $F_{\text{сц}}$  сцепления соприкасающихся магнитных шаров.

4. Считая, что неодимовые шары намагничены одинаково, используя экспериментальные данные, рассчитайте их магнитные моменты  $P_m$ .

5. Определите индукцию  $B_{\text{п}}$  магнитного поля на полюсе неодимового шара.

6. Снимите зависимость силы  $F(\theta)$  взаимодействия неодимового шара с железным от угла  $\theta$  между магнитным моментом  $\vec{P}_m$  постоянного магнита и линией, соединяющей центры шаров. Постройте график этой зависимости. Определите отношение  $k_{\text{э}} = F_{\text{max}}/F_{\text{min}}$  сил взаимодействия на графике 1.2.

*Примечание.* Диапазон значений силы для этой зависимости может существенно отличаться от уже выбранного масштаба для графика 1.2. В таком случае вы можете выбрать дополнительную ось ординат ( $Y$ ), отметив её с правой стороны графика, со своим масштабом и смещением. Укажите, к какой из осей ординат какая зависимость относится.

7. Считая, что железный шар находится в однородном поле, равном внешнему полю в его центре, сделайте теоретическую оценку отношения  $k_{\text{т}} = F_{\text{max}}/F_{\text{min}}$  сил взаимодействия магнита с железным шаром. Сравните теоретическую оценку с экспериментальным значением  $k_{\text{э}}$ , полученным в предыдущем пункте.

8. Оцените максимальную величину  $P_{\text{ш}}$  наведённого магнитного момента железного шара при расстоянии между центрами шаров  $r \approx 5$  см.

9. Оцените магнитную проницаемость материала, из которого изготовлен железный шар.

**Оборудование.** Два одинаковых неодимовых магнитных шара диаметром  $d = 20$  мм (один полюс помечен), железный шар диаметром  $d = 20$  мм, штатив, устройства для крепления и поворота шаров, шкала для отсчёта угла поворота магнита, электронные весы, деревянная линейка, перманентный маркер по требованию.

**Возможное решение**

1.1. Закрепим нижний магнит на подставки и положим на весы. Верхний магнит фиксируем в держателе при помощи резинки. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом, показания весов при удалённом расположении магнитов зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда, при сближении магнитов, весы показывают только силу магнитного взаимодействия, причём знаку «+» соответствует отталкивание, а знаку «-» — притяжение магнитов. Важно, чтобы центр магнита находился на оси вращения держателя. Убеждаемся в этом, поворачивая держатель на  $180^\circ$ : сила должна поменяться на противоположную.

а) Магнитный момент нижнего шара ориентируем по вертикали. Верхний шар закрепляем на штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнитов составляла  $\approx 10$  г. В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают  $\approx -10$  г). Поворачивая верхний шар (нижний шар неподвижен), снимаем зависимость показаний весов  $F_{\parallel}$  от угла  $\theta$ .

б) Расстояние между шарами не изменяем (сохраняем как в предыдущем пункте). Магнитный момент нижнего шара ориентируем горизонтально и параллельно плоскости вертикальной стойке штатива. Магнитный момент верхнего шара ориентируем параллельно магнитному моменту нижнего шара и закрепляем так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (она оказывается примерно в два раза меньше максимальной силы притяжения в случае  $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$ ). Поворачивая верхний шар в вертикальной плоскости (нижний шар неподвижен) снимаем зависимость показаний весов  $F_{\perp}$  от угла  $\theta$ .

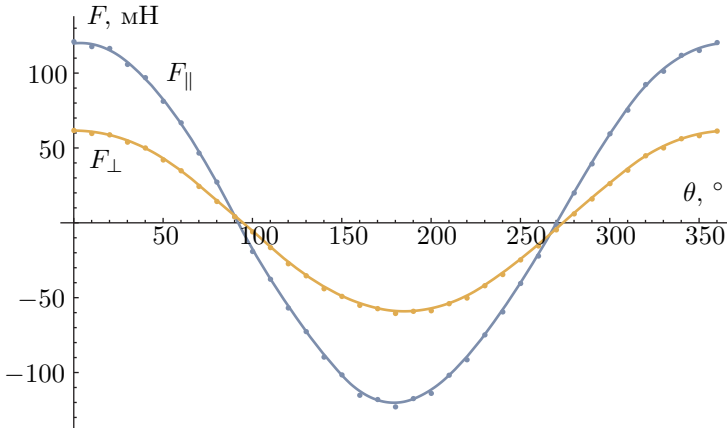


Рис. 1

Результаты измерений при расстоянии между шарами при  $r = 96$  мм представлены в Таблице №1.

Таблица 1.

$\theta, ^\circ$	$m_{\parallel}, \text{г}$	$F_{\parallel}, \text{мН}$	$m_{\perp}, \text{г}$	$F_{\perp}, \text{мН}$	$\gamma$
0	12,42	121,7	6,24	61,2	1,99
10	12,08	118,4	6,04	59,2	2,00
20	11,96	117,2	5,95	58,3	2,01
30	10,87	106,5	5,46	53,5	1,99
40	9,97	97,7	5,07	49,7	1,97
50	8,36	81,9	4,27	41,9	1,96
60	6,89	67,5	3,55	34,8	1,94
70	4,83	47,3	2,50	24,5	1,93
80	2,85	27,9	1,50	14,7	1,90
90	0,48	4,7	0,48	4,7	1,00
100	-1,88	-18,4	-0,53	-5,2	3,55
110	-3,77	-37,0	-1,58	-15,5	2,39
120	-5,73	-56,2	-2,66	-26,1	2,15
130	-7,34	-71,9	-3,46	-34,0	2,12
140	-9,08	-89,0	-4,33	-42,4	2,10
150	-10,29	-100,8	-4,84	-47,5	2,12
160	-11,68	-114,5	-5,44	-53,3	2,15
170	-11,97	-117,3	-5,66	-55,5	2,11
180	-12,47	-122,2	-5,98	-58,6	2,09
190	-11,91	-116,7	-5,84	-57,2	2,04
200	-11,55	-113,2	-5,80	-56,8	1,99
210	-10,32	-101,1	-5,33	-52,2	1,94
220	-9,26	-90,8	-4,95	-48,5	1,87
230	-7,56	-74,1	-4,13	-40,5	1,83
240	-6,00	-58,8	-3,38	-33,1	1,78
250	-4,06	-39,8	-2,40	-23,6	1,69
260	-2,19	-21,5	-1,47	-14,4	1,49
270	-0,04	-0,4	-0,40	-3,9	0,10
280	2,11	20,7	0,67	6,6	3,15
290	4,09	40,1	1,67	16,3	2,46
300	6,14	60,2	2,69	26,4	2,28
310	7,75	76,0	3,59	35,2	2,16
320	9,50	93,1	4,55	44,6	2,09
330	10,41	102,0	5,08	49,7	2,05
340	11,49	112,6	5,69	55,8	2,02
350	11,82	115,8	5,89	57,8	2,01
360	12,36	121,1	6,20	60,8	1,99

- 1.2. Графики зависимостей  $F_{\parallel}(\theta)$  и  $F_{\perp}(\theta)$  представлен на рисунке 1.  
 1.3. Построим график  $\gamma(\theta) = F_{\parallel}(\theta)/F_{\perp}(\theta)$ .

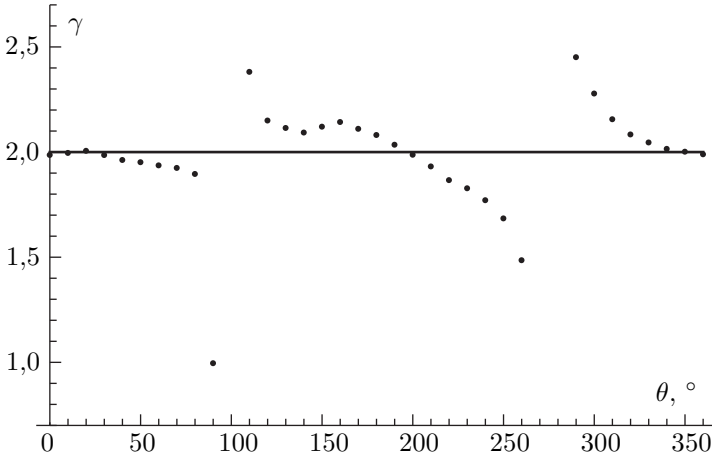


Рис. 2

2. Если второй диполь находится на оси первого ( $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$ ), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\parallel}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Если дипольный момент неподвижного шара перпендикулярен прямой, соединяющей их центры ( $\vec{r} \perp \vec{P}_m$ ), то

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2 \cos \theta}{r^4}, \quad \text{откуда следует}$$

$$F(0^\circ) = -F(180^\circ) = F_{\perp}^{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m^2}{r^4}, \quad F(90^\circ) = F(270^\circ) = 0.$$

Из графиков видно, что эксперимент согласуется с теорией при  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ . Также из теории следует, что амплитуды колебаний силы в первом и втором случаях различаются в два раза (при  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  обе силы равны нулю и отношение неопределено.):

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = 2.$$

В пределах погрешности это согласуется с экспериментом:

$$\gamma(\theta) = \frac{F_{\parallel}^{\max}}{F_{\perp}^{\max}} = \frac{12,42 \text{ г}}{6,24 \text{ г}} = 2,02.$$

3. Снимаем зависимость  $F(r)$ . Поскольку  $F \propto r^{-4}$ , график  $F^{-1/4}(r)$  — линейная функция (рис. 2).

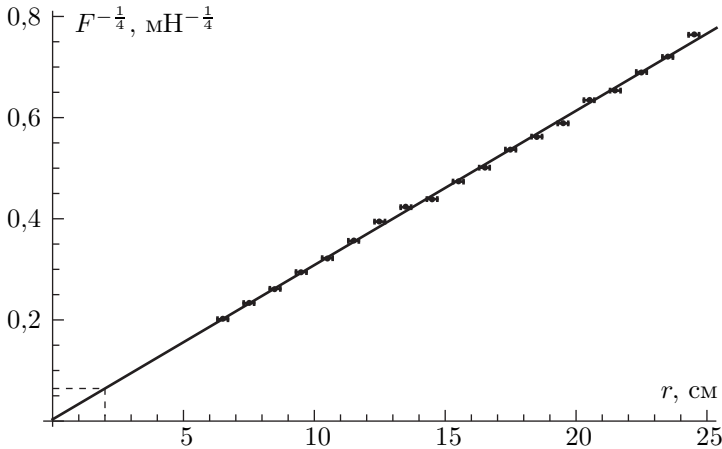


Рис. 3

Угловый коэффициент зависимости  $k_{\text{ш}} = 3,10 \pm 0,15 \text{ мН}^{-1/4} \text{ м}$ . С помощью него определим силу сцепления:

$$F_{\text{сц}} = F(d) = (k_{\text{ш}} d)^{-4} = 69 \pm 15 \text{ Н.}$$

4. Из формулы для максимальной силы находим:

$$P_m = \sqrt{\frac{F_{\text{сц}}(d/2)^4}{6\mu_0/4}} = 4,15 \text{ Дж/Тл.}$$

5. Найдём индукцию магнитного поля на полюсе:

$$B_{\text{п}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{R^3} = 0,83 \text{ Тл.}$$

6. Железный шар закрепим на подставке и разместим на весах. Для исключения силы тяжести подставки с закреплённым магнитом, показания весов при удалённом расположении шара и магнита зануляем с помощью клавиши «TARE». Тогда, при сближении шара с магнитом, весы показывают только силу их магнитного взаимодействия: знаку «+» соответствует отталкивание; знаку «-» — притяжение магнитов.

Магнитный шар закрепляем в штативе так, чтобы центры шаров находились на одной вертикали на таком расстоянии, чтобы максимальная сила взаимодействия магнита с шаром составляла  $F_{\text{ш}} \approx 5 \text{ гс}$ . В начальном положении магнитный момент верхнего шара ориентируем по вертикали и закрепляем

так, чтобы нулю отсчёта по шкале соответствовала максимальная сила притяжения (весы при этом показывают  $\approx 5$  г). Поворачивая верхний шар (нижний железный шар — неподвижен), снимаем зависимость показаний весов  $F$  от угла  $\theta$ . Результаты измерений при расстоянии между шарами  $r_0 = 46$  мм представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$	$\theta, ^\circ$	$m_{\text{ш}}, \text{г}$	$F_{\text{ш}}, \text{мН}$
0	5,40	52,9	120	2,33	22,8	260	1,40	13,7
20	5,12	50,2	140	3,69	36,2	270	1,35	13,2
40	4,00	39,2	160	4,95	48,5	280	1,53	15,0
60	2,60	25,5	180	5,50	53,9	300	2,50	24,5
80	1,55	15,2	200	4,88	47,8	320	3,88	38,0
90	1,39	13,6	220	3,53	34,6	340	4,94	48,4
100	1,51	14,8	240	2,14	21,0	360	5,42	53,1

Построим график  $F_{\text{ш}}(\theta)$  на графике вместе с  $F_{\parallel}(\theta)$  и  $F_{\perp}(\theta)$  (рис. 3). Поскольку диапазон величин  $F_{\text{ш}}$  заметно меньше, введём дополнительную ось справа. Отметим, что период полученной косинусоиды в два раза меньше периода графика  $F_{\parallel}(\theta)$ .

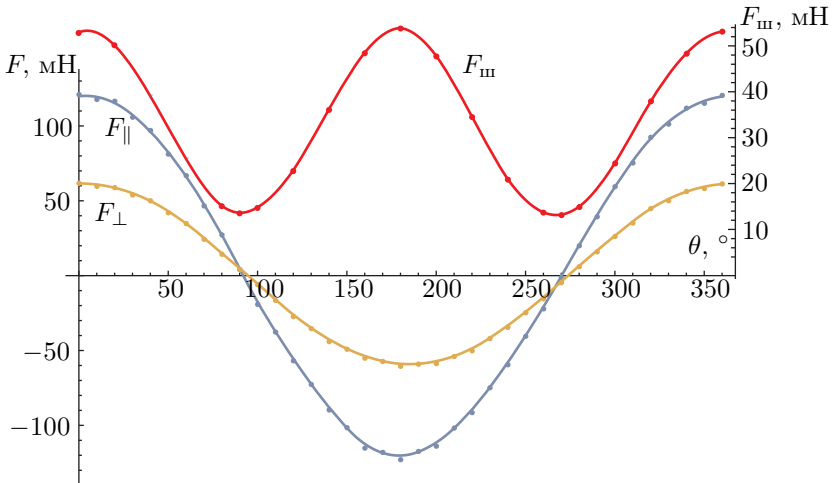


Рис. 4

7. Из законов Кулона, а также электрическо-магнитной аналогии не трудно получить что:

$$F_{\text{max}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m \alpha B_{\parallel}}{r^4},$$

где  $\alpha B_{\parallel} = \alpha(2P_m)/r^3$  — наведённый момент шара при  $\vec{r} \parallel \vec{P}_m$ .

$$F_{\min} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3P_m \alpha B_{\perp}}{r^4},$$

где  $\alpha B_{\perp} = \alpha(P_m)/r^3$  — наведённый момент шара при  $\vec{r} \perp \vec{P}_m$ .

Таким образом, теоретическая оценка  $k_T = F_{\max}/F_{\min} = 4$  — хорошо согласуется с экспериментальным значением:  $k_{\text{э}} = 53,1/13,2 = 4,03$ .

8. Максимальная сила взаимодействия шара с магнитом на расстоянии между центрами шаров  $r_0 = 46$  мм:

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m P_{\text{ш}}}{r_0^4} = 53,1 \text{ мН.}$$

Экспериментально находим, что примерно такая же сила притяжения возникает между магнитными шарами с магнитными моментами, направленными вдоль линии соединяющей центры шаров, на расстоянии  $r = 115$  мм:

$$F_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6P_m^2}{r^4} = 53,5 \text{ мН.}$$

Теперь можно оценить  $P_{\text{ш}}$ :

$$\frac{P_{\text{ш}}}{P_m} = \frac{F_{\max}}{F_{\parallel}} \frac{r_0^4}{r^4} \approx 0,024, \quad \text{откуда} \quad P_{\text{ш}} \approx 0,024P_m \approx 0,1 \text{ Дж/Тл.}$$

9. Оценим  $\mu$  из формулы для наведённого магнитного момента

$$P_{\text{ш}} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} BR^3 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} 2P_m \frac{R^3}{r_0^3} \approx 0,024P_m.$$

В пределах погрешности получаем, что отношение

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \approx 1, \quad \text{откуда} \quad \mu \gg 1.$$



**Задача E11-2 Магнитное взаимодействие**

			Сумма	
<b>1</b>	<b>Таблица измерений, графики для сил, график для отношения</b>			<b>4.0</b>
	1.1 Таблица измерений			
		Полупериод от минимума до максимума (в таблице есть сила)	1.8+0.2	
		Полупериод от нуля до нуля (в таблице есть сила)	0.9+0.1	
	1.2 Графики для силы		0.9+0.1	
	1.3 График для отношения	1.0		
<b>2</b>	<b>Вывод формул</b>			<b>2.0</b>
	$F_1 = \frac{6 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) p_1 p_2}{r^4}$		0.6	
	$F_2 = \frac{3 \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) p_1 p_2}{r^4}$		1.2	
	$F_3 = 0$		0.2	
<b>3</b>	<b>Определение силы сцепления <math>F_{\text{сц}} = 57 - 70 \text{ Н}</math></b>			<b>2.0</b>
		Экстраполяция	1.2+0.6+0.2	
		Через пропорцию	0.6+0.3+0.1	
		Экспериментально	0.6+0.3+0.1	
<b>4</b>	<b>Определение <math>P_m = 3.5 - 4.5 \text{ Дж/Тл}</math></b>			<b>1.0</b>
	Аналогично пункту 3			
<b>5</b>	<b>Определение <math>B = 0.7 - 0.9 \text{ Тл}</math></b>			<b>1.0</b>
	Аналогично пункту 3			
<b>6</b>	<b>Таблица измерений, графики для сил, отношение</b>			<b>2.0</b>
	Таблица		1.2	
	График		0.4	
	$k_a < \approx 4$ ( $k_a > 3.5$ )		0.4	
<b>7</b>	<b>Определено <math>k_t = 4</math></b>			<b>1.0</b>
<b>8</b>	<b>Определено <math>P_{\text{ш}} = 0.02 - 0.5 \text{ Дж/Тл}</math></b>			<b>1.0</b>
<b>9</b>	<b>Определение <math>\mu</math></b>			<b>1.0</b>
	$\frac{\mu-1}{\mu+2} \approx 1$ при условии наличия 8 пункта		1.0	

