

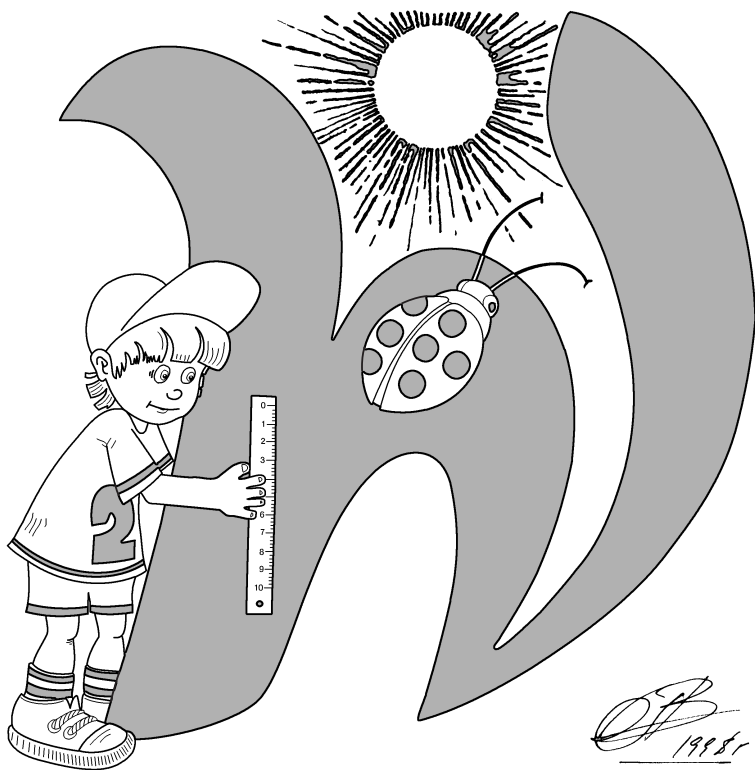
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2007/2008 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

9 класс

1. Подлесный Д.
2. Чудновский А.
3. Шведов О.
4. Гуденко А.

10 класс

1. Чивилёв В.
2. Слободянин В.
3. Мельниковский Л.
4. Воробьёв И.
5. Проскурин М.

11 класс

1. Ефимов В.
2. Слободянин В.
3. Ерофеев И.
4. Чивилёв В.
5. Шведов О.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Гусихин П., Ерофеев И.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система \LaTeX 2 ϵ .
© Авторский коллектив
Подписано в печать 28 января 2013 г. в 15:07.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Шарик на стержне

Массивный шарик насажен на стержень, жёстко закреплённый под углом α к горизонту, и может без трения скользить по нему. К шарiku на лёгкой нерастяжимой нити подвешен точно такой же шарик. Другая нить удерживает верхний шарик на стержне в равновесии (рис. 1).

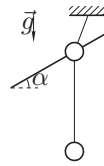


Рис. 1

1. С какими ускорениями начнут движение шарики сразу после пережигания верхней нити?
2. Пусть теперь шарики соединены не нитью, а лёгкой пружиной. С какими ускорениями шарики начнут движение в этом случае?

Ускорение свободного падения g .

Задача 2. Неопытный водитель

Неопытный водитель тренируется водить учебный автомобиль на большой ровной горизонтальной площадке. Для анализа ошибок вождения на учебном автомобиле установлено устройство, регистрирующее модуль скорости и модуль ускорения центра масс автомобиля в каждый момент времени. По окончании движения оно выдаёт результат в виде двух графиков: $|\vec{v}(t)|$ и $|\vec{a}(t)|$. Результат одного из таких измерений представлен на рисунке (рис. 2). Вертикальные участки на графике ускорения соответствуют переключениям режима работы мотора или тормозов, которые происходят столь быстро, что не могут быть отображены в выбранном масштабе.

1. Найдите путь S , пройденный автомобилем за всё время движения.
2. Определите характер движения автомобиля на каждом участке пути и изобразите качественно траекторию автомобиля (вид сверху).

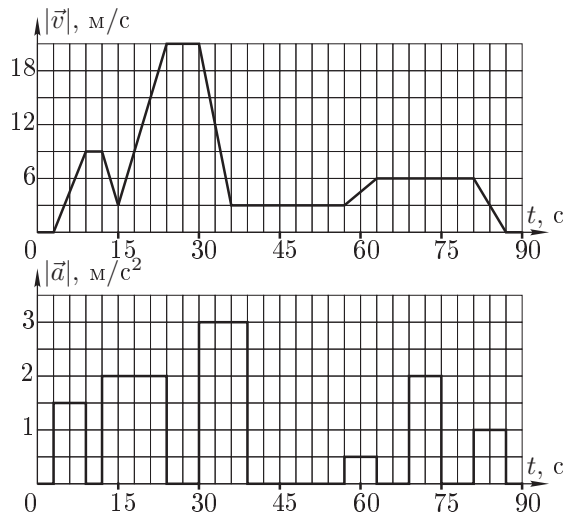


Рис. 2

Задача 3. Нелинейная схема

Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь из одинаковых нелинейных элементов (рис. 3), вольтамперная характеристика каждого из которых (зависимость силы тока через элемент от напряжения на нём) представлена на графике (рис. 4).

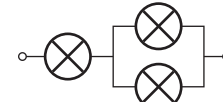


Рис. 3

Определите, какой будет сила тока в цепи, если приложенное к ней напряжение U_0 равно: а) 0,15 В; б) 3 В.

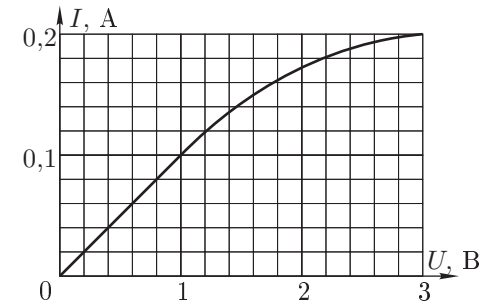


Рис. 4

Задача 4. Айсберг

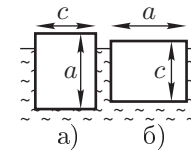


Рис. 5

В течение своей «жизни» айсберг несколько раз опрокидывается, поворачиваясь на 90° . Для изучения этого явления любознательный школьник проделал несколько модельных экспериментов, наблюдая процесс таяния льда в ванне. Опыты показали, что «айсберг» неустойчив к перевороту, если хотя бы один из его поперечных размеров меньше его высоты примерно на 20%. Затем был проделан следующий количественный эксперимент: тающий брусок льда в форме параллелепипеда размером $a \times b \times c = 10 \times 10 \times 8 \text{ см}^3$ опускался в ванну с водой при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Попытки заставить плавать «айсберг» в положении а) (рис. 5) не увенчались успехом: он практически сразу самопроизвольно опрокидывался в устойчивое положение б). Далее в процессе таяния «айсберг», оставаясь параллелепипедом (тонкий надводный козырёк подтаивал и практически не образовывался), изменялся в размерах и примерно через полчаса ($\tau_0 = 30 \text{ мин}$) самопроизвольно опрокинулся.

1. Какими были размеры модельного «айсберга» непосредственно перед этим опрокидыванием?
2. На основании описанного опыта оцените время τ_1 опрокидывания реального айсберга с размерами $500 \times 500 \times 400 \text{ м}^3$ в океане с температурой $t_1 = 5^\circ\text{C}$. Каковы его размеры при опрокидывании? Считайте, что теплоподвод происходит только по воде и скорость таяния пропорциональна разности температур льда и окружающих его вод.

Примечание. Температуру айсбергов принять равной 0°C .

10 класс

Задача 1.

Два куска пластины с массами $3m$ и m брошены одновременно с горизонтальной поверхности Земли со скоростями v и $2v$ (рис. 6), причём скорости кусков не находятся в одной вертикальной плоскости. Скорость куска массой $3m$ составляет угол $\beta = 45^\circ$ с вертикалью и угол $\alpha = 60^\circ$ с прямой, проходящей через куски перед броском. Через некоторое время куски сталкиваются и слипаются. С какой скоростью упали на Землю слипшиеся куски?

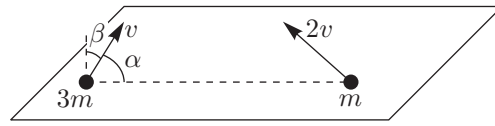


Рис. 6

Задача 2. Какой КПД больше?

Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс A , состоящий из двух изохор и двух изобар. Затем тот же газ совершает аналогичный процесс B (рис. 7). КПД какого процесса больше? Полагая КПД процесса A заданным и равным η_A , вычислите η_B . В обоих процессах $\Delta p_{21} = \Delta p_{32} = \Delta p$ и $\Delta V_{21} = \Delta V_{32} = \Delta V$, но их числовые значения неизвестны.

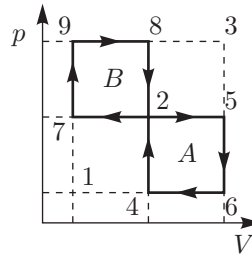


Рис. 7

Задача 3. Труба Ньютона

Говорят, первые эксперименты по оптике Ньютон проводил с металлической зеркально полированной цилиндрической трубой длиной $l = 8$ см и диаметром $d = 1$ см (рис. 8). В центре её нижнего основания он устанавливал точечный источник света O , а верхнее основание закрывал чёрной шторкой A с маленьким отверстием S посередине. В его экспериментах на высоте $h = 5$ см над шторкой располагался горизонтальный квадратный экран B со стороной $a = 3$ см, причём его центр находился точно на оси трубы.

1. Изобразите в масштабе 1:1 на листе бумаги в клетку, считая размер клетки равным 5 мм, картину, которую Ньютон видел на экране.
2. Что увидел бы Ньютон, если бы поднял шторку на высоту $\Delta l = 2$ см над верхним торцом трубы (не меняя положения остальных предметов)?

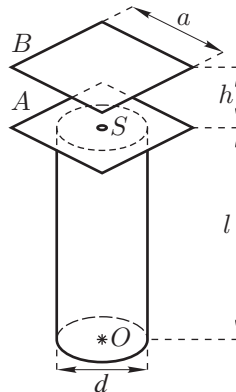


Рис. 8

Задача 4. Атом в однородном поле

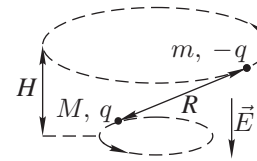


Рис. 9

Частицы с массами M и m и зарядами q и $-q$ соответственно вращаются с угловой скоростью ω по окружностям вокруг оси, направленной по внешнему однородному электрическому полю с напряжённостью E (рис. 9). Найдите расстояние R между частицами и расстояние H между плоскостями их орбит.

Задача 5. Горячий коктейль

В открытом сосуде находятся две несмешиваемые жидкости равных масс при температуре окружающей среды. В момент времени τ_1 смесь начинают нагревать, подводя постоянную мощность. В момент времени τ_3 сосуд оказывается пустым. В результате, получена зависимость температуры содержимого сосуда от времени (рис. 10). Найдите отношение удельных теплот парообразования и удельных теплоёмкостей жидкостей.

Считайте, что коэффициент пропорциональности α между разностью температур и потоком теплоты от сосуда в окружающую среду постоянен.

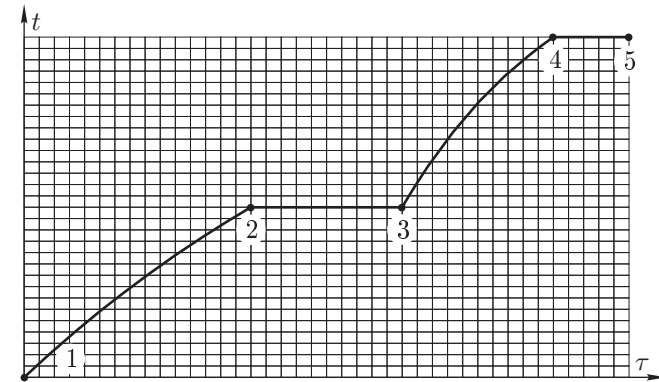


Рис. 10

11 класс

Задача 1. Муравей-спортсмен

Муравей из точки A без начальной скорости скользит по гладкой соломинке, у которой наклонный прямолинейный участок AB в точке B плавно переходит в дугу BC с радиусом кривизны R , а эта дуга в точке C также плавно переходит в горизонтальный прямолинейный участок CD (рис. 11).

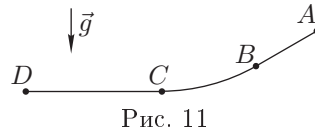


Рис. 11

Известно, что $AB : BC : CD = 1 : 2 : 3$, и суммарная длина пути много меньше R .

Вычислите время скольжения муравья по соломинке от точки A до точки D .

Задача 2. Какой КПД больше?

Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс C , состоящий из двух изохор и двух изобар. Затем тот же газ совершает аналогичный процесс D (рис. 12). КПД какого процесса больше? Полагая КПД процесса C заданным и равным η_C , вычислите η_D . В обоих процессах $\Delta p_{21} = \Delta p_{32} = \Delta p$ и $\Delta V_{21} = \Delta V_{32} = \Delta V$, но их числовые значения неизвестны.

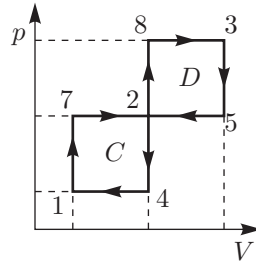


Рис. 12

Задача 3. Изолированная система

Цилиндрический сосуд с металлическим дном и не проводящими электрический ток стенками закрыт тонким массивным металлическим поршнем, который располагается на высоте h , много меньшей диаметра сосуда. Внутри сосуда находится включённый в электрическую схему резистор, размеры которого много меньше размеров сосуда (рис. 13). Схема соединена лёгкими гибкими проводами с поршнем и дном сосуда. Изначально сосуд был заполнен гелием при давлении $p \gg \epsilon_0 \mathcal{E}^2 / h^2$. Система теплоизолирована, помещена в вакуум и находится в равновесии.

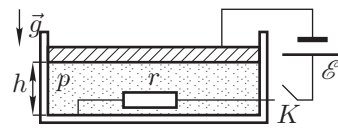


Рис. 13

Ключ K замыкают. Найдите максимальную высоту H , на которой может оказаться поршень после установления в системе равновесного состояния.

Теплоёмкостями сосуда и поршня пренебречь. Считать сопротивление r постоянным. Трение между поршнем и сосудом достаточно мало. Гелий считать идеальным газом. Электрическую проницаемость гелия принять равной $\epsilon_{\text{He}} = 1$.

Задача 4. Массивный канат

С помощью массивного однородного каната, подвижного блока радиуса R и неподвижного блока удерживают в покое груз (рис. 14). Масса каната m , его длина l , масса груза с подвижным блоком M . Расстояния по вертикали H_1 и H_2 известны.

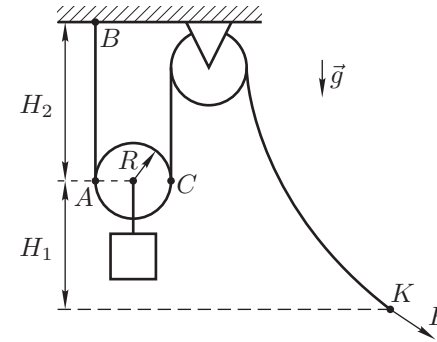


Рис. 14

1. Найдите силу натяжения каната в точке B .
2. Найдите прикладываемую к концу каната в точке K силу F .

Трением в осях блоков пренебречь.

Задача 5. Очень толстая линза

Прозрачная пластина с показателем преломления n ограничена двумя сферическими поверхностями с радиусами кривизны R и $r < R$.

1. Какой должна быть толщина пластины L , чтобы падающий на поверхность с радиусом кривизны R параксиальный пучок света преобразовывался в параллельный?
2. Во сколько раз увеличивается интенсивность пучка света (энергия, переносимая за единицу времени через единицу площади) после прохождения через пластину?
3. Какое угловое увеличение для удалённых предметов даёт пластина? Потерями энергии пучка внутри пластины можно пренебречь.

Возможные решения 9 класс

Задача 1. Шарик на стержне

Нарисуем все силы, действующие на шарики (рис. 15). Запишем второй закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на стержень:

$$ma_1 = (T + mg) \sin \alpha,$$

где a_1 — ускорение верхнего шарика, T — сила натяжения нити, N — сила реакции стержня.

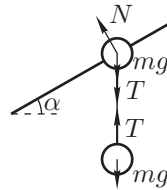


Рис. 15

Для нижнего шарика запишем второй закон Ньютона в проекции на нить:

$$ma_2 = mg - T.$$

1. Пользуясь кинематической связью (проекции ускорений шариков на нить связаны соотношением $a_2 = a_1 \sin \alpha$), выразим из вышеприведённых уравнений ускорения шариков. Получим:

$$a_1 = \frac{2g \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}, \quad a_2 = \frac{2g \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

2. Поскольку сразу после пережигания нити относительное расположение шариков не успело поменяться, то растяжение пружины будет таким же, что и до отрыва нити. Таким образом, $T = mg$. В результате получим:

$$a_1 = 2g \sin \alpha, \quad a_2 = 0.$$

Задача 2. Неопытный водитель

Заметим, что значение модуля ускорения было равно модулю производной модуля скорости на участках $t_1 \in (0 \text{ с}, 36 \text{ с})$, $t_2 \in (39 \text{ с}, 69 \text{ с})$, $t_3 \in (75 \text{ с}, 90 \text{ с})$. Следовательно, на этих участках водитель ехал прямолинейно, а расстояния, которые он преодолел, могут быть найдены как площади под графиком скорости от времени на соответствующих участках (рис. 16). Таким образом, $S_1 = 378 \text{ м}$, $S_2 = 117 \text{ м}$, $S_3 = 54 \text{ м}$.

На участках $t_1^* \in (36 \text{ с}, 39 \text{ с})$, $t_2^* \in (69 \text{ с}, 75 \text{ с})$ модуль скорости не менялся, тем не менее ускорение было, следовательно, автомобиль на этих участках двигался по окружностям с радиусами $r_1^* = (v_1^2/a_1)^* = 3 \text{ м}$, $r_2^* = (v_2^2/a_2)^* = 18 \text{ м}$ и проходил расстояния соответственно $S_1^* = v_1 t_1^* = 9 \text{ м}$ и $S_2^* = v_2 t_2^* = 36 \text{ м}$.

1. Таким образом, автомобиль за всё время преодолел путь

$$S = S_1 + S_1^* + S_2 + S_2^* + S_3 = 594 \text{ м}.$$

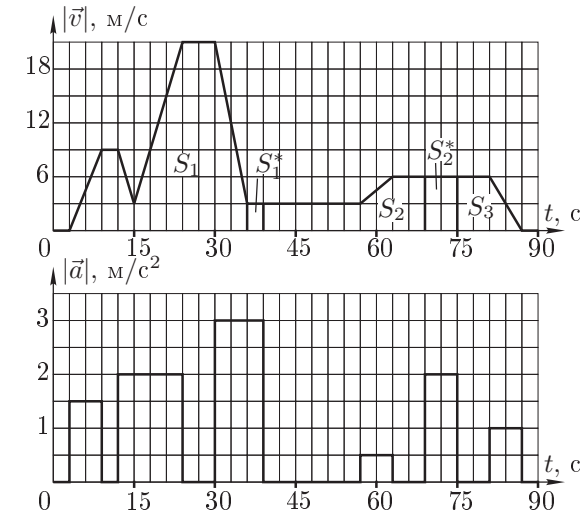


Рис. 16

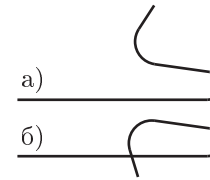


Рис. 17

2. Можно найти, на какой угол повернулся автомобиль на участках движения по окружности: $\alpha_1 = S_1^*/r_1 = 3 \text{ рад} \approx 172^\circ$, $\alpha_2 = S_2^*/r_2 = 2 \text{ рад} \approx 115^\circ$. В результате возможны две принципиально различные ситуации: 1) повороты производились в разные стороны; 2) повороты производились в одну и ту же сторону. Эти ситуации показаны на рисунке 17 а) и б) соответственно.

Задача 3. Нелинейная схема

При малых значениях силы тока ($I \leq 0,1 \text{ А}$) нелинейный элемент можно считать резистором с постоянным сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Следовательно, по правилам нахождения последовательного и параллельного сопротивления резисторов сопротивление всей цепи

$$R_0 = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R = 15 \text{ Ом}.$$

Такая замена нелинейного элемента на резистор допустима, если сила тока в цепи не превосходит значения $I_m = 0,1 \text{ А}$. В этом случае максимальное напряжение, приложенное к цепи, $U_m = 1,5 \text{ В}$. Первое из приведённых в условии задачи значений напряжения U_0 удовлетворяет неравенству $U_0 \leq U_m$, следовательно, $I_0 = U_0/R_0 = 0,01 \text{ А}$.

Если сила тока I_0 в цепи лежит в интервале от $0,1 \text{ А}$ до $0,2 \text{ А}$, то каждый из параллельно соединённых элементов по-прежнему можно заменить на резистор с сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. При этом напряжение на каждом из

них равно $I_0R/2$. Обозначим через U_1 напряжение на третьем элементе цепи, тогда $U_0 = U_1 + I_0R/2$, а точка (I_0, U_1) должна принадлежать графику вольтамперной характеристики.

Таким образом, для определения силы тока в цепи следует изобразить на графике вольтамперной характеристики прямую $U = U_0 - IR/2$ и найти точку пересечения этой прямой с вольтамперной характеристикой. Значение I в точке пересечения является силой тока в цепи (рис. 18).

Проведя построение, находим, что в случае (б) сила тока $I \approx 0,18 \text{ А} < 0,2 \text{ А}$.

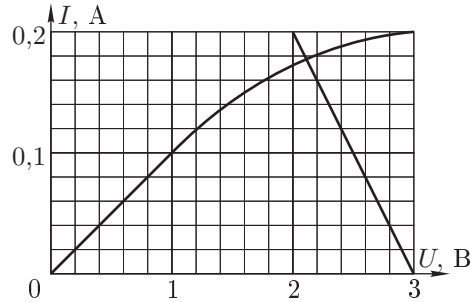


Рис. 18

Задача 4. Айсберг

Модельный «айсберг» теряет устойчивость, превращаясь в «неустойчивый» параллелепипед, за счёт того, что его поперечные размеры изменяются примерно в два раза быстрее вертикального («айсберг» почти не тает сверху). Толщину растаявшего льда x находим из уравнения $a - 2x = 0,8(c - x)$, откуда $x = (a - 0,8c)/1,2 = 3 \text{ см}$. Следовательно, размеры перевернувшегося «айсберга» $4 \times 4 \times 5 \text{ см}^3$.

Аналогично находим, что для реального айсберга слой растаявшего льда $y = 150 \text{ м}$, и он перевернётся, имея характерные размеры $200 \times 200 \times 250 \text{ м}^3$. Заметим, что из-за меньшей температуры океана и, соответственно, разности температур айсберга и воды скорость таяния в реальных условиях примерно в $(t_0 - t)/(t_1 - t) = 4$ раза меньше. Таким образом, получаем, что реальный айсберг перевернётся через $\tau_1 \simeq 4y/x \approx 1 \text{ год}$ и 2 месяца.

10 класс

Задача 1.

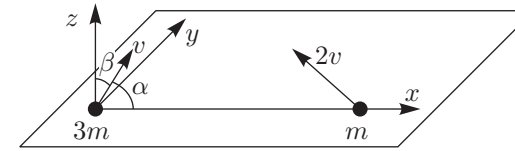


Рис. 19

Направим оси x и y горизонтально, а ось z вертикально (рис. 19). Проекции на оси скорости куска массой $3m$ равны:

$$v_{1x} = v \cos \alpha = v/2, \quad v_{1z} = v \cos \beta = v/\sqrt{2}, \quad v_{1y} = \sqrt{v^2 - v_{1x}^2 - v_{1z}^2} = v/2.$$

Поскольку куски пластины слипаются, проекции их скоростей на оси y и z равны, поэтому

$$v_{2y} = v_{1y} = v/2, \quad v_{2z} = v_{1z} = v/\sqrt{2}.$$

Кусок пластины массой m движется против направления оси x , следовательно

$$v_{2x} = -\sqrt{(2v)^2 - v_{2y}^2 - v_{2z}^2} = -\sqrt{13}v/2.$$

Проекция скорости центра масс системы на оси:

$$v_{cx} = \frac{3mv_{1x} + mv_{2x}}{4m} = \frac{3 - \sqrt{13}}{8}v,$$

$$v_{cy} = \frac{3mv_{1y} + mv_{2y}}{4m} = \frac{v}{2},$$

$$v_{cz} = \frac{3mv_{1z} + mv_{2z}}{4m} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Скорость слипшихся кусков при падении равна скорости центра масс при бросании:

$$v_{\text{пад}} = v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2} = \frac{v}{8} \sqrt{70 - 6\sqrt{13}} \approx 0,87v.$$

Задача 2. Какой КПД больше?

Пусть за цикл газ совершает работу $A_0 = \Delta p \Delta V$. Тогда $\eta_A = A_0/Q_{425}$, где подведённое к газу количество теплоты $Q_{425} = U_{54} + A_{25}$. Аналогично $\eta_B = A_0/Q_{798}$, где $Q_{798} = U_{87} + A_{98}$. Заметим, что $A_{98} = A_{25} + A_0$. Сравним изменения внутренних энергий U_{54} и U_{87} . Выражение для U_{87} :

$$\begin{aligned} U_{87} &= C_V(T_8 - T_7) = \frac{C_V}{R}(p_3V_2 - p_2V_1) = \\ &= \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + \Delta p \Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + A_0). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим, что

$$U_{54} = \frac{C_V}{R}(p_2 V_3 - p_1 V_2) = \frac{C_V}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1 + \Delta p \Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1 + A_0),$$

то есть $U_{54} = U_{87}$. Отсюда

$$\eta_A = \frac{A_0}{Q_{425}} = \frac{A_0}{U_{54} + A_{25}}, \quad \eta_B = \frac{A_0}{Q_{798}} = \frac{A_0}{U_{54} + A_{25} + A_0} = \frac{\eta_A}{1 + \eta_A}.$$

Откуда $\eta_B < \eta_A$.

Задача 3. Труба Ньютона

Рассмотрим некоторое сечение трубы плоскостью, содержащей прямую OS (рис. 20). В силу осевой симметрии задачи любой луч, испущенный источником в этой плоскости, в ней и останется после любого количества отражений. Поэтому для решения задачи достаточно ограничиться одним сечением. Во всех остальных картина будет такой же.

В рассматриваемом сечении у источника O есть два отражения O_1 и O_2 , причём $OO_1 = OO_2 = d$. Их изображениями, в свою очередь, являются точки O_3 и O_4 такие, что $OO_3 = OO_4 = 2d$, изображениями которых являются O_5 и O_6 , и так далее. Объединяя изображения в разных сечениях, мы получим множество концентрических окружностей с радиусами $r_n = d, 2d, 3d, \dots$. Проходя через отверстие, лучи на экране будут образовывать концентрические кольца, радиусы r'_n которых определяются из подобия соответствующих треугольников: $\triangle SOO_k \sim \triangle SO'O'_k$, то есть $r'_n = O'O'_n = ndh/l$.

На экране полностью уместятся кольца с радиусами $r'_1 = 6,25$ мм и $r'_2 = 12,5$ мм. Кроме них на экране будут видны точка в центре (образованная лучами, не претерпевшими отражений) и четыре дуги окружности радиусом $r'_3 = 18,75$ мм (рис. 21).

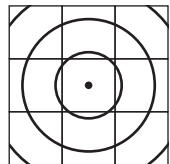


Рис. 21

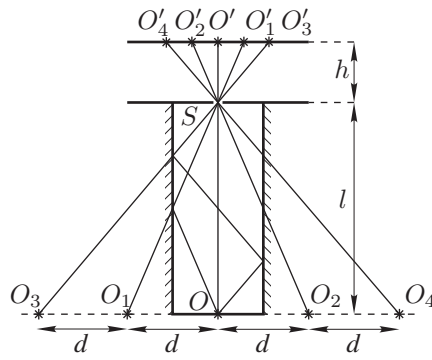


Рис. 20

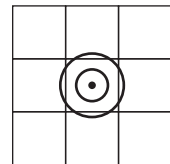


Рис. 22

Если шторку поднять на высоту Δl над верхним торцом трубы, то расстояние от отверстия S до источника будет $L = l + \Delta l$, а расстояние до экрана

$H = h - \Delta l$. Радиус колец на экране в этом случае будет определяться выражением $R'_n = ndH/L$, а их количество будет ограничено условием $R'_n/H < d/(2\Delta l)$. Следовательно на экране будут видны только центральная точка и кольца с радиусами $R'_1 = 0,3$ см и $R'_2 = 0,6$ см (рис. 22).

Задача 4. Атом в однородном поле

Направим ось Oy вдоль вектора напряжённости поля \vec{E} , а ось Ox перпендикулярно ей (рис. 23). Пусть отрезок, соединяющий частицы, составляет с осью Oy угол α . Запишем второй закон Ньютона для частиц в проекции на введённые оси в момент времени, когда ускорения частиц направлены вдоль оси Ox :

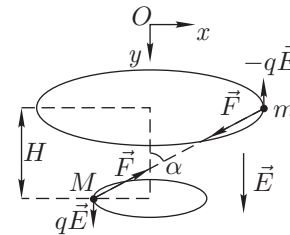


Рис. 23

$$\text{Ось } Ox : \quad M\omega^2 r_1 = \frac{kq^2 \sin \alpha}{R^2}, \quad (1)$$

$$-m\omega^2 r_2 = -\frac{kq^2 \sin \alpha}{R^2}, \quad (2)$$

$$\text{Ось } Oy : \quad qE = \frac{kq^2 \cos \alpha}{R^2}, \quad (3)$$

где r_1 и r_2 — орбиты окружностей, по которым движутся частицы M и m соответственно.

Заметим также, что

$$r_1 + r_2 = R \sin \alpha. \quad (4)$$

Таким образом, из (1), (2) и (4) находим:

$$R = \sqrt[3]{\frac{kq^2}{\omega^2} \frac{M+m}{Mm}}.$$

Наконец, используя (3), получим:

$$H = R \cos \alpha = \frac{qE}{\omega^2} \frac{M+m}{Mm}.$$

Задача 5. Горячий коктейль

Из графика понятно, что сначала обе жидкости нагревались, затем на участке 2–3 первая жидкость выкипала. Далее нагревалась только вторая жидкость, и на участке 4–5 выкипела и она. Измерим угловые коэффициенты касательных к криволинейным участкам графика в точках 1, 2, 3 и 4: $k_i = \Delta t(\tau_i)/\Delta \tau$. Температура окружающей среды $t = t_1$. Пусть исходная масса

каждой из жидкостей равна m , мощность нагревателя P , а мощность тепловых потерь $N = \alpha(t - t_1)$.

Рассмотрим процесс нагревания жидкости, например, вблизи точки 3. За малое время $\Delta\tau$ нагреватель отдаёт количество теплоты $\Delta Q_+ = P\Delta\tau$, а величина тепловых потерь составит $\Delta Q_- = \alpha(t_2 - t_1)\Delta\tau$. Тогда температура второй жидкости поднимется на:

$$\Delta t = \frac{Q_+ - Q_-}{c_2 m}, \quad \text{откуда} \quad k_3 = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P - \alpha(t_2 - t_1)}{c_2 m}.$$

Таким образом, для точки 3 имеем:

$$P = k_3 c_2 m + \alpha(t_2 - t_1). \quad (1)$$

Аналогично для точки 2 запишем:

$$P = k_2(c_1 m + c_2 m) + \alpha(t_2 - t_1). \quad (2)$$

Вычтя уравнение (2) из (1), получим:

$$k_3 c_2 m = k_2(c_1 m + c_2 m), \quad \text{откуда} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_3}{k_2} - 1 \approx 1,8.$$

Для точки 4 можем записать аналогичное уравнение:

$$P = k_4 c_2 m + \alpha(t_4 - t_1). \quad (3)$$

На участках 2–3 и 4–5 температура была постоянной. Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau_{32} = L_1 m + \alpha(t_2 - t_1)\tau_{32}, \quad (4)$$

$$P\tau_{54} = L_2 m + \alpha(t_4 - t_1)\tau_{54}. \quad (5)$$

Подставив в уравнение (4) значение для мощности из (1) и аналогично подставив из (3) в (5), найдём:

$$L_1 m = k_3 c_2 m \tau_{32}, \quad L_2 m = k_4 c_2 m \tau_{54}, \quad \text{откуда} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{k_3 \tau_{32}}{k_4 \tau_{54}} \approx 4,4.$$

11 класс

Задача 1. Муравей-спортсмен

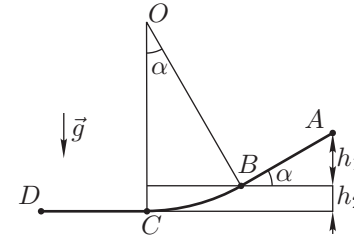


Рис. 24

Полное время движения муравья складывается из времени движения t_1 по участку AB , времени t_2 на участке BC и времени t_3 на участке CD . Пусть $AB = l$.

1. Восстановим из точек B и C перпендикуляры к траектории движения муравья, они являются радиусами дуги BC (рис. 24). Пусть $\angle BOC = \alpha = 2l/R$. Поскольку $l \ll R$, то $\sin \alpha \approx \alpha = 2l/R$. Ускорение на прямолинейном участке AB равно $a_1 = g \sin \alpha = 2gl/R$.

$$\text{Поскольку} \quad l = \frac{a_1 t_1^2}{2}, \quad \text{то} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Скорость в конце этого участка $v_B = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl \sin \alpha} = 2l\sqrt{g/R}$.

2. Вычислим t_2 . Из закона сохранения энергии найдём скорость v_C муравья в точке C . Это будет его наибольшая скорость.

$$mg(h_1 + h_2) = \frac{mv_C^2}{2}, \quad \text{следовательно,} \quad v_C = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}.$$

Найдём $h_1 + h_2$.

$$h_1 = l \sin \alpha = 2\frac{l^2}{R}, \quad h_2 = R(1 - \cos \alpha) = 2R \sin^2(\alpha/2) = 2R(\alpha/2)^2 = 2\frac{l^2}{R},$$

$$h_1 + h_2 = 4\frac{l^2}{R}, \quad \text{таким образом,} \quad v_C = 2l\sqrt{\frac{2g}{R}}.$$

На участке BC движение муравья аналогично колебательному движению математического маятника с длиной подвеса R . Его циклическая частота $\omega = \sqrt{g/R}$. Время t_2 движения муравья из точки B в точку C равно времени его обратного движения из точки C в точку B , которое можно найти из уравнения гармонических колебаний:

$$v_B = v_C \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} t_2\right), \quad \text{откуда} \quad t_2 = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{v_B}{v_C} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

3. На отрезке CD муравей движется равномерно со скоростью v_C , следова-

$$\text{тельно,} \quad t_3 = \frac{3l}{v_C} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{R}{2g}}.$$

Полное время движения муравья

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \approx 2,85 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Задача 2. Какой КПД больше?

Пусть за цикл газ совершает работу $A_0 = \Delta p \Delta V$. Тогда $\eta_C = A_0 / Q_{172}$, где подведённое к газу количество теплоты $Q_{172} = U_{12} + A_{72}$. Аналогично $\eta_D = A_0 / Q_{283}$, где $Q_{283} = U_{23} + A_{83}$. Заметим, что $A_{83} = A_{72} + A_0$. Сравним изменения внутренних энергий U_{12} и U_{23} . Выражение для U_{12} :

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{C_V}{R}(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= \frac{C_V}{R}(p_1 \Delta V + V_1 \Delta p + \Delta p \Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_1 \Delta V + V_1 \Delta p + A_0). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим, что

$$\begin{aligned} U_{23} &= \frac{C_V}{R}(p_3 V_3 - p_2 V_2) = \frac{C_V}{R}(p_2 \Delta V + V_2 \Delta p + A_0) = \\ &= \frac{C_V}{R}(p_1 \Delta V + V_1 \Delta p + 3A_0) = U_{12} + 2 \frac{C_V}{R} A_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\eta_C = \frac{A_0}{Q_{172}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72}},$$

$$\begin{aligned} \eta_D &= \frac{A_0}{Q_{283}} = \frac{A_0}{U_{23} + A_{83}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72} + \frac{2C_V + R}{R} A_0} = \\ &= \frac{\eta_C}{1 + \frac{C_V + C_p}{R} \eta_C} = \frac{\eta_C}{1 + 4\eta_C}. \end{aligned}$$

Откуда $\eta_D < \eta_C$.

Задача 3. Изолированная система

Поскольку система теплоизолированная, то можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$E_1 + A = E_2,$$

где E_1 и E_2 — энергии системы соответственно до и после замыкания ключа, а A — работа внешних сил. В нашем случае это работа электродвижущих

сил. Поскольку система вначале находилась в равновесии, то масса поршня $m = pS/g$.

Пусть через источник ЭДС протёк заряд q . Тогда дно сосуда и поршень окажутся заряженными, образуя пластины конденсатора. Ёмкость этого конденсатора в конечном состоянии будет $C = \varepsilon_0 S / H$, где S — площадь дна сосуда. Поскольку напряжение на конденсаторе равно \mathcal{E} , то протёкший через источник ЭДС заряд:

$$q = C \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{H}.$$

Поскольку на пластинах находятся разноимённые заряды, то они притягиваются с силой

$$F = \frac{q^2 / S}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2H^2}.$$

В конечном состоянии давление газа будет $p + F/S$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{R} p_1 V_1 + mgh + \mathcal{E}q &= \frac{C_V}{R} p_2 V_2 + mgH + \frac{q^2}{2C}; \\ \frac{3}{2} pSh + pSh + \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{H} &= \frac{3}{2} \left(p + \frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}^2}{2H^2} \right) SH + pSH + \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2H}; \\ \frac{5}{2} pS(H - h) &= -\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{H}, \\ \left(\frac{H}{h} \right)^2 - \left(\frac{H}{h} \right) &= -\frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}^2}{10h^2 p}. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение, найдём

$$H = h \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}^2}{10h^2 p}} \right),$$

так как нас интересует больший корень. С учётом того, что

$$\frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}^2}{h^2 p} \ll 1,$$

получим

$$H \approx h \left(1 - \frac{\varepsilon_0 \mathcal{E}^2}{10h^2 p} \right).$$

Задача 4. Массивный канат

Условие равновесия подвижного блока с грузом и куском каната AC :

$$2T_A = Mg + \frac{m}{l} \pi Rg.$$

Отсюда сила натяжения в точке A :

$$T_A = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g.$$

Причём $T_C = T_A$. Сила натяжения в точке B :

$$T_B = T_A + \frac{m}{l}H_2g = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g + \frac{m}{l}H_2g.$$

Для нахождения F переместим мысленно кусок каната KC , сместив точку C вниз на малое расстояние x . Работа всех сил над куском каната KC равна изменению потенциальной энергии этого куска:

$$T_Cx - Fx = \frac{m}{l}xgH_1.$$

Итак,

$$F = T_C - \frac{m}{l}gH_1 = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g - \frac{m}{l}H_1g.$$

Задача 5. Очень толстая линза

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу о падении параллельного пучка света на сферическую поверхность радиуса R , отделяющую среду с показателем преломления n от воздуха. Рассмотрим два луча, падающие на поверхность раздела под малыми углами. Пусть луч DOF (рис. 25) проходит через центр шара. Другой луч, ABF , преломляется в точке B на границе раздела сред, падая на неё под углом α . Тогда $\angle OBF = \alpha/n$ как угол преломления, $\angle BOD = \alpha$; из $\triangle BOF$ находим, что $\angle BFO = \alpha - \alpha/n$. Применим к $\triangle BOF$ теорему синусов и учтём, что синус малого угла приближённо равен самому углу в радианах:

$$\frac{\alpha/n}{|OF|} \approx \frac{\alpha(1 - 1/n)}{|BO|} \approx \frac{\alpha}{|BF|},$$

отсюда $|BF| = |BO|/(1 - 1/n) = Rn/(n - 1)$. Таким образом, узкий параллельный пучок лучей после преломления на сферической поверхности раздела сред сходится в фокусе, находящемся от поверхности раздела на расстоянии $Rn/(n - 1)$ на луче, проходящем через центр.

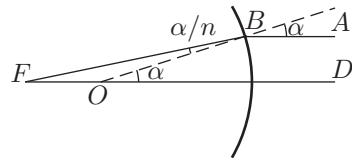


Рис. 25

Аналогичным образом получаем, что при падении на вогнутую сферическую поверхность раздела сред (радиус R) параллельный пучок света преобразуется в расходящийся, продолжения лучей пересекаются на расстоянии $Rn/(n - 1)$ от поверхности.

1. Перейдём теперь к ответам на вопросы задачи. Параллельный пучок света будет преобразован оптической системой в параллельный, если фокусы двух сферических поверхностей совпадают. В условии не сказано, выпуклыми или вогнутыми являются поверхности раздела. Поэтому следует рассмотреть все возможные случаи.

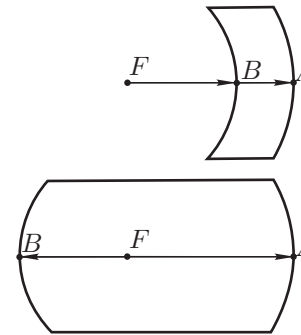


Рис. 26

[1] Если предположить, что поверхность большего радиуса вогнутая, то получаемый после преломления на ней расходящийся пучок может быть преобразован в параллельный только путём преломления на поверхности радиуса $r > R$, что противоречит условию задачи. Напротив, поверхность радиуса r может быть как выпуклой, так и вогнутой (рис. 26). В обоих случаях $|AF| = Rn/(n - 1)$, $|BF| = rn/(n - 1)$. Следовательно, в первом случае $l = |AB| = (R - r)n/(n - 1)$, во втором случае $l = |AB| = (R + r)n/(n - 1)$.

2. При прохождении через пластинку пучок света сжимается в R/r раз, следовательно, его интенсивность возрастает в $(R/r)^2$ раз.

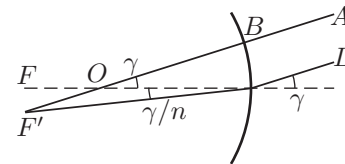


Рис. 27

3. Найдём угловое увеличение, даваемое пластинкой. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу: определим, под каким углом γ к оси симметрии (рис. 27) должен падать параллельный пучок света, чтобы после преломления на сферической поверхности радиуса R сойтись в точке F' на расстоянии y от фокуса F в фокальной плоскости. Из симметрии относительно поворота вытекает, что

$$\gamma = \frac{y}{|OF|} = \frac{y(n - 1)}{R}.$$

Следовательно, падающий на сферическую поверхность под углом γ параллельный пучок света после преломления сходится в точку в фокальной плоскости, находящуюся на расстоянии $\gamma R/(n - 1)$ от фокуса F .

Таким образом, пучок, падающий на пластинку под углом γ_1 к оси симметрии параллельно ей, выходит из пластинки под углом γ_2 , определяемым из соотношения $\gamma_1 R/(n - 1) = \gamma_2 r/(n - 1)$. Отсюда находим угловое увеличение: $\gamma_1/\gamma_2 = r/R$.