Публикацию подготовил Всероссийский образовательный журнал “Потенциал” www.potential.org.ru

На фотографии слева направо: Старков Григорий, Дорошенко Андрей, Кудряшова Нина, Козел Станислав Миронович, Маша – гид команды России, Землянов Владислав, Трегубов Дмитрий

XL Международная олимпиада школьников по физике (Мексика, г. Мерида). 2009 год

В этом году Международная олимпиада по физике проходила в Мексике в городе Мерида. В Мериду прибыло только 316 школьников из 69 стран. (Для сравнения заметим, что в прошлом году во Вьетнаме было 376 участников из 76 государств).

В сборную команду России вошли:

1. Трегубов Дмитрий – выпускник Кировского физико-математического лицея. Учителя-наставники физики Канин Павел Евгеньевич (учитель физики) и Гырдымов Михаил Владимирович (методист Центра дополнительного образования).

2. Землянов Владислав – выпускник гимназии г. Урай Ханты-Мансийского автономного округа. Учитель-наставник по физике Козловская Зоя Георгиевна.

3. Кудряшова Нина – выпускница Бийского лицея Алтайского края. Учитель-наставник по физике Аполонский Александр Николаевич, к. т. н., профессор.

4. Дорошенко Андрей – выпускник лицея № 92 г. Омска. Учитель-наставник по физике Афанасьева Юлика Александровна, к. ф.-м. н., учитель физики.

5. Старков Григорий – выпускник школы № 7 г. Ноябрьска Ямало-Ненецкого автономного округа. Учитель-наставник Ткачук Игорь Викторович.

Команду России возглавляли профессор Московского физико-технического института Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович

Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателя работал доцент МФТИ Михаил Николаевич Осин.

Как и в прошлые годы, 8 «сборников», имеющих наивысший рейтинг, были приглашены на последние трёхнедельные летние сборы, на которых отрабатывались навыки экспериментальной работы на сложном современном оборудовании и дополнительно изучались элементы специальной теории относительности, волновой оптики, ядерной физики и ряд других тем, входящих в программу МФО.

Во время сборов с командой работали преподаватели кафедры общей физики МФТИ, СУНЦ МГУ, научные сотрудники институтов Российской Академии Наук, а также студенты Физтеха – победители Международных физических олимпиад прошлых лет.

В связи с длительным перелётом и заметной разницей во времени, которая составляет с Москвой 9 часов, сборная России прилетела в Мериду за день до официального начала олимпиады. Это позволило ребятам успешно пройти акклиматизацию и более комфортно перейти на новый режим.

Оба тура, как и в прошлом году, оказались крайне трудоёмкими.

Ниже в таблице приведён список из 11 лидирующих стран (согласно их рейтингу).

№	Страна	Медаль			Сумма баллов
		Золото	Серебро	Бронза	
1	Китай	5			216
2	Корея	4	1		186
3	Индия	4	1		180
4	Тайвань	3	2		179
5	США	4	1		176
6	**Россия**	**3**	**2**		**165**
7	Румыния	3	2		161
8	Сингапур	2	3		154
9	Таиланд	1	4		152
10	Индонезия	1	3	1	148
11	Япония	2	1	2	144

Как и в прошлые годы, на олимпиаде лидерство захватили страны из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах и по другим предметам.

На олимпиаде участникам было предложено три теоретических задачи и два экспериментальных задания. Каждая задача и задание оценивались из 10 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

Ниже мы приводим несколько сокращённую версию задач теоретического тура. В следующем номере будут опубликованы экспериментальные задания.

Теоретическая задача 1. Эволюция системы Земля-Луна

Учёные научились определять расстояние от Луны до Земли с большой точностью с помощью лазерного луча, отражающегося от специальных зеркал, установленных на поверхности Луны.

В ходе таких измерений учёные непосредственно определили, что Луна медленно удаляется от Земли. Это происходит потому, что из-за образования приливных волн момент импульса Земли передаётся Луне.

1. Сохранение момента импульса

Пусть L_1 – полный момент импульса системы Земля-Луна. Сделаем следующие предположения.

1) L_1 определяется только вращением Земли вокруг собственной оси и вращением Луны вокруг Земли.

2) Орбита Луны круговая, и Луна считается материальной точкой.

У пирамиды Майя

3) Ось вращения Земли и ось вращения Луны совпадают.

4) Для упрощения расчётов будем считать, что эти оси проходят через центр Земли. Во всех пунктах данной задачи моменты инерции, моменты сил и моменты импульса рассчитываются относительно этой оси.

5) Влиянием Солнца на движение рассматриваемой системы можно пренебречь.

1 *a*. Запишите для настоящего времени выражение для полного момента импульса системы Земля-Луна. Выразите его через момент инерции Земли $I_З$, угловую скорость вращения Земли $\omega_{З_1}$, момент инерции Луны $I_{Л_1}$ относительно земной оси и угловую скорость орбитального движения Луны $\omega_{Л_1}$.

Процесс передачи момента импульса от Земли к Луне прекратится, когда земные сутки и период обращения Луны будут иметь одинаковую продолжительность. К этому времени приливные подъёмы воды, которые Луна вызывает на Земле, будут ориентированы вдоль прямой, соединяющей центры Земли и Луны, и поэтому момент силы исчезнет.

1 *b*. Запишите выражение для конечного значения полного момента импульса системы Земля-Луна L_2. Используйте те же предположения, что и в пункте 1 *a*. Выразите его через момент инерции Земли $I_З$, конечную угловую скорость вращения Земли и обращения Луны ω_2 и конечный момент инерции Луны $I_{Л_2}$.

1 *c*. Пренебрегая вкладом вращения Земли в конечную величину полного момента импульса, напишите уравнение, выражающее закон сохранения момента импульса.

2. Конечные расстояние и угловая скорость движения системы Земля-Луна

Будем считать, что орбита движения Луны вокруг Земли всё время остаётся круговой. Для конечного состояния:

2 *a*. Запишите уравнение, определяющее закон движения Луны по круговой орбите вокруг Земли. Выразите данное уравнение через расстояние D_2 между центрами Земли и Луны, массу Земли $M_З$, угловую скорость ω_2 и гравитационную постоянную G.

2 *b*. Запишите выражения для расстояния между Землёй и Луной D_2 и

для угловой скорости Земли ω_2 как функцию полного момента импульса системы L_1, масс Земли и Луны $M_З$ и $M_Л$ соответственно и гравитационной постоянной G.

2 *c*. Запишите выражение для угловой скорости ω_2 системы Земля-Луна через известные параметры L_1, $M_З$, $M_Л$ и G.

Найдите численные значения D_2 и ω_2. Для этого вычислите момент инерции Земли.

2 *d*. Запишите выражение для момента инерции Земли $I_З$, предполагая, что она является шаром с плотностью ρ_1 от центра до расстояния r_1 и шаровым слоем с плотностью ρ_0 от расстояния r_1 до расстояния до поверхности r_0 (рис. 1).

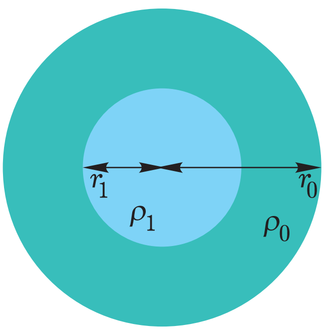

Рис. 1. Земля как шар и шаровой слой с двумя плотностями ρ_1 и ρ_0

2 *e*. Рассчитайте момент инерции Земли $I_З$, используя следующие численные значения:

$$\rho_1 = 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad r_1 = 3{,}5 \cdot 10^6 \text{ м},$$

$$\rho_0 = 4{,}0 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad r_0 = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

2 *f*. Оцените численное значение полного момента импульса рассматриваемой системы L_1.

Массы Земли и Луны равны $M_З = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг и $M_Л = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг соответственно. В настоящее время расстояние между Землёй и Луной равно $D_1 = 3{,}8 \cdot 10^8$ м. Угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси составляет $\omega_{З_1} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\text{с}^{-1}$. Угловая скорость обращения Луны вокруг Земли $\omega_{Л_1} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1}$. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot c^{-2}$.

2 *g*. Найдите конечное расстояние D_2 в метрах и в единицах расстояния от Земли до Луны в настоящее время D_1.

2 *h*. Найдите конечную угловую скорость ω_2 в c^{-1} и конечную продолжительность суток в единицах нынешних суток.

Найдите отношение конечного момента импульса Земли к моменту импульса Луны. Это должна быть малая величина.

2 *i*. Найдите отношение конечного углового момента Земли к конечному угловому моменту Луны.

3. Насколько Луна удаляется за год?

Теперь найдите, насколько Луна удаляется от Земли каждый год. Для этого определите момент силы, действующей на Луну в настоящее время. Предположите, что приливные волны можно заменить двумя материальными точками массами m, расположенными на поверхности Земли (рис. 2). Пусть θ – угол между линией, соединяющей места наибольшего подъёма, и линией, соединяющей центры Земли и Луны.

3 *a*. Найдите модуль силы F_c, действующей на Луну со стороны ближайшей к ней точечной массы.

3 *b*. Найдите модуль силы F_f, действующей на Луну со стороны

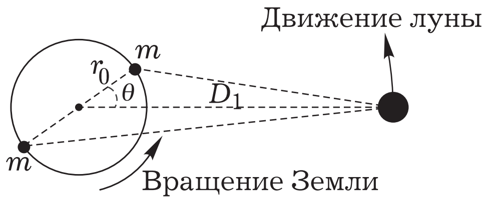

Рис. 2. Схема для определения моментов сил, которые действуют на Луну и вызываются подъёмом воды на Земле

отдалённой от неё точечной массы.

3 *c*. Найдите модуль τ_c момента силы, действующего на Луну со стороны ближайшей к ней точечной массы.

3 *d*. Найдите модуль τ_f момента силы, действующего на Луну со стороны отдалённой от неё точечной массы.

3 *e*. Найдите полный момент силы τ от двух масс. Так как $r_0 \ll D_1$, выпишите выражение до первого значимого порядка по r_0 / D_1. Считайте, что $(1+x)^a \approx 1+ax$ при $x \ll 1$.

3 *f*. Вычислите численное значение полного момента силы, принимая во внимание, что $\theta = 3^\circ$ и $m = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ кг (заметьте, что эта масса составляет примерно 10^{-8} от массы Земли).

Найдите, насколько в настоящее время расстояние от Земли до Луны изменяется за год. Для этого выразите момент импульса Луны через $M_Л$, $M_З$, D_1 и G.

3 *g*. Найдите численное значение увеличения расстояния между Землёй и Луной за год в настоящее время.

3 *h*. Найдите численное значение уменьшения угловой скорости вращения Земли ω_{E_1} и увеличение продолжительности земных суток за год.

4. Куда уходит энергия?

В противоположность моменту импульса, который сохраняется, полная энергия системы не сохраняется.

4 *a*. Запишите выражение для полной (кинетической и гравитационной) энергии E системы Земля-Луна в настоящее время. Выразите его через $I_З$, $\omega_{З_1}$, $M_Л$, $M_З$, D_1 и G.

4 *b*. Запишите выражение для изменения ΔE этой энергии E как функцию изменения параметров D_1 и $\omega_{З_1}$. Оцените численное значение величины ΔE за год, используя величины изменения D_1 и $\omega_{З_1}$, найденные в пунктах 3 *g* и 3 *h*.

Проверьте, что эти потери энергии связаны с переходом механической энергии в тепловую в процессе подъёма и опускания воды в каждой приливной волне. Считайте, что изменение потенциальной энергии при подъёме одного горба приливной волны эквивалентно подъёму слоя воды толщиной $h = 0{,}5$ м, покрывающего всю поверхность Земли (для упрощения можно считать, что вся Земля покрыта водой) в среднем на высоту 0,5 м. Это случается дважды в день. Далее считайте, что 10% этой гравитационной энергии переходит в теплоту благодаря наличию вязкости при опускании воды. Считайте плотность воды равной $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг$\cdot$м$^{-3}$, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м$\cdot$с$^{-2}$.

4 *c*. Чему равна масса этого поверхностного слоя воды?

4 *d*. Вычислите виличину потери этой энергии за год. Сравните полученное значение с потерями энергии, рассчитаными ранее (в п. 4 *b*).

Теоретическая задача 2.
Лазерное охлаждение атомов и «оптическая патока»

Термины «лазерное охлаждение» и «оптическая патока» относятся к охлаждению (замедлению) пучка нейтральных атомов с помощью распространяющихся в противоположных направлениях лазерных пучков одной и той же частоты.

Область захвата, называемая «оптической патокой», лежит на пересечении трёх взаимно перпендикулярных пар противоположно направленных лазерных пучков. Оптическая диссипативная сила (трение) напоминает силу вязкости, действующую на тело, которое движется сквозь патоку.

Часть 1. Основы лазерного охлаждения

Для простоты рассмотрим одномерную задачу, то есть не будем принимать во внимание оси y и z. Пусть атом с массой m движется в направлении $+x$ со скоростью v и обладает двумя внутренними энергетическими состояниями с разницей энергий $\hbar\omega_0$, где $\hbar = h/2\pi$ (рис. 3). Первоначально он находится в нижнем энергетическом состоянии, и его энергию можно принять равной нулю. Луч лазера с частотой ω_L распространяется в направлении $-x$ и взаимодействует с атомом. Пучок лазера состоит из большого числа фотонов, каждый из которых обладает энергией $\hbar\omega_L$ и импульсом $-\hbar q$ (рис. 3). Атом может поглотить фотон и после этого излучить другой фотон за счёт спонтанного излучения. Вероятность спонтанного излучения в направлении $+x$ и $-x$ одна и та же. Атомы движутся с нерелятивистскими скоростями $v \ll c$ (где c – скорость света). Также имейте в виду, что $\hbar q/mv \ll 1$, то есть импульс атома значительно больше импульса оди-ночного фотона. При написании ответов приводите лишь результаты, линейные по отношению к указанным величинам (т. е. сохраняйте в ответах лишь величины первого порядка малости).

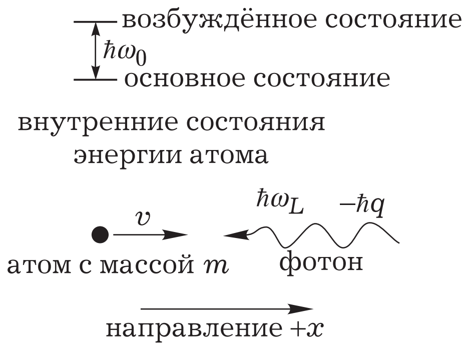

Рис. 3

Пусть частота лазера ω_L такова, что для движущегося атома она находится в резонансе с частотой внутренего перехода. Ответьте на следующие вопросы.

1. Поглощение

1 *a*. Запишите условие резонансного поглощения фотона.

1 *b*. Запишите выражение для импульса атома $p_{\text{ат}}$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчёта.

1 *c*. Запишите выражение для полной энергии атома $\varepsilon_{\text{ат}}$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчёта.

2. Спонтанное излучение фотона в направлении $-x$

Через некоторое время после

поглощения фотона атом может излучить другой фотон в направлении $-x$.

2 *a.* Запишите выражение для энергии фотона $\varepsilon_{ф}$, излучённого в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.

2 *b.* Запишите выражение для импульса фотона $p_{ф}$, излучённого в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.

2 *c.* Запишите выражение для импульса атома $p_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.

2 *d.* Запишите выражение для полной энергии атома $\varepsilon_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта.

3. Спонтанное излучение фотона в направлении +*x*

Через некоторое время после поглощения фотона другой атом может излучить фотон в направлении $+x$.

3 *a.* Запишите выражение для энергии фотона $\varepsilon_{ф}$, излучённого в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.

3 *b.* Запишите выражение для импульса фотона $p_{ф}$, излучённого в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.

3 *c.* Запишите выражение для импульса атома $p_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчета.

3 *d.* Запишите выражение для полной энергии атома $\varepsilon_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта.

4. Усреднённое излучение после поглощения

Имейте в виду, что спонтанное излучение фотона происходит с одинаковой вероятностью в направлениях $-x$ или $+x$.

4 *a.* Запишите выражение для средней энергии излучённого фотона $\varepsilon_{ф}$.

4 *b.* Запишите выражение для среднего значения импульса излучённого фотона $p_{ф}$.

4 *c.* Запишите выражение для средней энергии атома $\varepsilon_{ат}$ после процесса излучения фотона.

4 *d.* Запишите выражение для среднего значения импульса атома $p_{ат}$ после процесса излучения фотона.

5. Передача энергии и импульса

Если принять, что процесс поглощения и излучения одного фотона происходит так, как он описан выше, в среднем существует передача энергии и импульса от лазерного излучения к атому.

5 *a.* Запишите выражение для среднего изменения энергии атома $\Delta\varepsilon$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона.

5 *b.* Запишите выражение для среднего изменения импульса атома Δp в результате полного процесса поглощения и излучения фотона.

6. Передача энергии и импульса лазерным пучком, распространяющимся в направлении +*x*

Пусть лазерный луч с частотой ω_L' распространяется в направлении $+x$, в то время как атом движется в направлении $+x$ со скоростью v. Предполагая наличие резонансных условий между внутренним переходом атома и лазерным излучением, ответьте на следующие вопросы.

6 *a.* Запишите выражение для среднего изменения энергии атома $\Delta\varepsilon$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона.

6 b. Запишите выражение для среднего изменения импульса атома Δp в результате полного процесса поглощения и излучения фотона.

Часть 2. Диссипация энергии и явление «оптической патоки»

Квантовые процессы в природе имеют внутренне присущую им неопределённость. Поэтому из-за того, что время между поглощением и излучением фотона *конечно*, резонансное условие не должно выполняться *точно*, как мы предполагали до сих пор. То есть частоты лазерных пучков ω_L и ω_L' могут быть произвольными, но поглощение и излучение всё равно будут происходить, правда, с различными (квантовыми) вероятностями, и наибольшая вероятность будет соответствовать точному резонансу. Среднее время между поглощением и излучением одного фотона называется временем жизни возбуждённого уровня и обозначается Γ^{-1}.

Рассмотрим коллектив из N атомов, *покоящихся* в лабораторной системе отсчета, и луч лазера с частотой ω_L, который с ними взаимодействует. Атомы поглощают и излучают непрерывно, так что в среднем имеется $N_{\text{воз}}$ атомов в возбуждённом состоянии (и $N-N_{\text{воз}}$ в основном). Квантово-механическое рассмотрение приводит к следующему результату:

$$N_{\text{воз}} = N\frac{\Omega_R^2}{(\omega_0-\omega_L)^2+\dfrac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2},$$

где ω_0 – резонансная частота атомного перехода, а Ω_R – так называемая частота Раби; Ω_R^2 пропорциональна *интенсивности* лазерного пучка. Как уже было сказано, эта величина отлична от нуля, даже если резонансная частота ω_0 отличается от частоты лазерного пучка ω_L. Другой способ выражения того же результата состоит в том, что количество процессов поглощения-излучения в единицу времени равно $N_{\text{воз}}\Gamma$.

Рассмотрим физическую ситуацию (рис. 4), где два распространяющихся в противоположных направлениях лазерных пучка имеют *одинаковую*, но *произвольную* частоту ω_L, и взаимодействуют с газом из N атомов, которые движутся в направлении $+x$ со скоростью v.

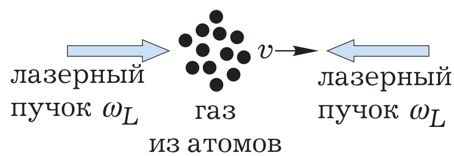

Рис. 4

7. Сила, действующая на атомный пучок со стороны лазеров

7 a. Используя предыдущую информацию, найдите силу, с которой лазерные пучки действуют на атомы. Считайте, что $mv \gg \hbar q$.

8. Предел малой скорости

Предполагая, что скорость атомов достаточно мала, можно получить выражение для силы в первом порядке малости по v.

8 a. Найдите выражение для силы, полученной в вопросе 7 a для этого приближения.

Используя этот результат, вы можете получить условия для ускорения или замедления атомов излучением, или для отсутствия эффекта.

8 b. Запишите условие для получения положительной силы (ускорение атомов).

8 c. Запишите условие получения нулевой силы.

8 d. Запишите условие получения

отрицательной силы (замедление атомов).

8 *e*. Теперь предположим, что атомы движутся со скоростью $-v$ (в направлении $-x$). Запишите условие получения отрицательной силы (замедления атомов).

9. «Оптическая патока»

В случае отрицательной силы возникает диссипация (трение). Предположим, что первоначально при $t=0$ газ из атомов имеет скорость v_0.

9 *a*. В пределе малых скоростей найдите скорость атомов через время τ после включения лазера.

9 *b*. Теперь предположите, что газ из атомов находится в тепловом равновесии при температуре T_0. Найдите температуру T после того, как пучки были выключены через время τ.

Примечание. Это приближение нельзя использовать для достижения произвольно низкой температуры.

Теоретическая задача 3. Почему звёзды такие большие?

Большинство обычных звёзд светит, потому что в их центральной части происходят реакции термоядерного синтеза, в результате которых водород превращается в гелий.

В этой задаче вам предстоит показать, что звёзды должны быть достаточно большими, чтобы в них могли протекать реакции синтеза на основе водорода, и получить минимально необходимые для этого массу и радиус звезды.

1. Классическая оценка температуры в центре звёзд

Предположим, что звезда состоит из ионизированного водорода (количество электронов равно количеству протонов), который ведёт себя как идеальный газ. С классической точки зрения для осуществления реакции синтеза два протона должны сблизиться на расстояние 10^{-15} м, чтобы сильное ядерное взаимодействие, обеспечивающее их притяжение, стало доминировать.

2. Оценка температуры в центре звёзд на основе классической физики

Для того чтобы ядра сблизить, необходимо преодолеть кулоновское отталкивание. Примем, что два протона (точечных заряда) движутся навстречу друг другу со среднеквадратичной скоростью теплового движения $v_{\text{ср.кв}}$.

2 *a*. Какой должна быть температура газа T_c, чтобы расстояние максимального сближения d_c равнялось 10^{-15} м?

3. Почему предыдущая оценка температуры неверна

Выполним независимые оценки температуры в центре звезды. Звёзды находятся в равновесии, так как сила тяжести уравновешивается направленной наружу силой давления. Для слоя газа на расстоянии r от центра звезды условие гидростатического равновесия имеет вид:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

где ΔP – разность давлений газа на слое толщиной Δr на расстоянии r от центра, G – постоянная всемирного тяготения, M_r – масса звёздного вещества внутри сферы радиуса r, ρ_r – плотность газа в слое на расстоянии r от центра звезды.

Разность давлений P_c в центре звезды и P_0 на её поверхности, равная $\Delta P \approx P_0 - P_c$, может быть оценена как $\Delta P \approx -P_c$, поскольку $P_c \gg P_0$. В том же приближении $\Delta r \approx R$, где R – полный радиус звезды, и $M_r \approx M_R = M$, где M – полная масса звезды. Плотность звёздного вещества на расстоянии r от центра звезды можно оценить её значением в центре, т. е. $\rho_r \approx \rho_c$. Полагая, что давление можно определить как давление идеального газа, выполните следующее.

3 *a*. Запишите выражение для температуры T_c в центре звезды, выразив её через радиус звезды, её массу и физические константы. Теперь проверим справедливость этой оценки.

3 *b*. Используя выражение из 2 *a*, выразите отношение M/R для звезды только через T_c и физические константы.

3 *c*. Используйте значение T_c из пункта 1 *a* и найдите численное значение M/R для звезды.

3 *d*. Вычислите отношение $M(S)/$ $/R(S)$ для Солнца и убедитесь, что оно значительно меньше величины, полученной в пункте 2 *c*.

4. Оценка температуры в центре звезды на основе квантовой физики

Значительное несоответствие, обнаруженное в пункте 3 *d*, указывает, что классическая оценка для T_c, полученная в пункте 2 *a*, неправильна. Это несоответствие удаётся устранить, если учесть квантовые эффекты. Они состоят в том, что протоны ведут себя как волны, и отдельный протон локализуется на расстоянии порядка длины волны де Бройля λ_p. Поэтому если расстояние максимального сближения протонов d_c оказывается близким к λ_p, протоны в квантовом смысле перекрываются и могут сливаться.

4 *a*. Полагая, что условие $d_c =$ $= \lambda_p / \sqrt{2}$ обеспечивает возможность синтеза, для протонов со скоростью $v_{\text{ср.кв.}}$ запишите выражение для T_c, используя только физические постоянные.

4 *b*. Получите численное значение температуры T_c, найденной в пункте 4 *a*.

4 *c*. Используя значение T_c, полученное в пункте 4 *b*, и формулу, полученную в пункте 3 *b*, численно определите значение отношения M/R для звезды. Убедитесь, что это значение достаточно близко к определённому для Солнца отношению $M(S)/R(S)$.

Звёзды главной последовательности удовлетворяют этому отношению в широком интервале масс. Следовательно, квантовая оценка температуры в центре Солнца правильна.

5. Отношение массы к радиусу для звёзд

5 *a*. Покажите, что для любой звезды, в которой происходит синтез на основе водорода, отношение её массы M к радиусу R – величина постоянная, определяемая лишь физическими константами. Запишите выражение M/R для звёзд, в которых происходит синтез на основе водорода.

6. Масса и радиус самых маленьких звёзд

Результат, полученный в пункте 5 *a*, предполагает, что если для звёзд выполнено найденное соотношение, то они могут иметь любую массу. Это неверно.

Газ внутри обычных звёзд, в которых происходит синтез на основе водорода, ведёт себя как идеальный. Это означает, что характерное расстояние *между электронами* d_e в среднем должно быть больше, чем длина волны де Бройля для электронов λ_e. Если электроны находятся ближе друг к другу, они оказываются в так называемом вырожденном состоянии, что приводит к иному поведению звёзд. Заметьте, что электроны и протоны внутри звезды рассматриваются по-разному. Для протонов волны де Бройля должны перекрываться, чтобы начался синтез, а для электронов перекрытия не должно быть, чтобы их можно было считать идеальным газом.

Абсерватория Майя

Плотность звёздного вещества возрастает с уменьшением расстояния до центра звезды. Тем не менее, для оценки по порядку величины считайте, что его плотность постоянна. Можно также воспользоваться тем, что $m_p \gg m_e$.

6 *a*. Запишите уравнение для n_e – средней концентрации электронов в звезде.

6 *b*. Запишите уравнение для d_e – характерного расстояния между электронами внутри звезды.

6 *c*. Используя условие $d_e \geq \dfrac{\lambda_e}{\sqrt{2}}$, запишите выражение для наименьшего возможного радиуса обычной звезды. Считайте, что температура звезды равна температуре в её центре.

6 *d*. Вычислите значение радиуса наименьшей обычной звезды, выраженное как в метрах, так и нормированное на радиус Солнца.

6 *e*. Вычислите массу наименьшей обычной звезды как в килограммах, так и в массах Солнца.

7. Синтез на основе ядер гелия в старых звёздах

Когда звёзды стареют, они сжигают почти весь водород, превращая его в гелий (He). Чтобы свечение продолжалось, в них должен осуществляться синтез более тяжёлых элементов из гелия. В ядре гелия два протона и два нейтрона, поэтому его заряд равен двум зарядам протона, а масса примерно в 4 раза больше, чем у протона. Мы уже видели, что условие слияния двух протонов имеет вид

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}}.$$

7 *a*. Записав аналогичное условие для ядер гелия, найдите среднеквадратичную скорость ядер гелия $\upsilon_{\text{ср.кв.}}(\text{He})$ и температуру $T(\text{He})$, необходимую для синтеза на основе гелия.

Материал предоставили В.П. Слободянин, С.М. Козел.

Публикацию подготовил Всероссийский образовательный журнал "Потенциал" www.potential.org.ru

XL Международная олимпиада школьников по физике (Мексика, г. Мерида). 2009 год. Теоретический тур. Решения и ответы

Теоретическая задача 1. Эволюция системы Земля-Луна

1. Сохранение момента импульса

1 *a*. $L_1 = I_З \omega_{З_1} + I_{Л_1} \omega_{Л_1}$.

1 *b*. $L_2 = I_З \omega_{З_2} + I_{Л_2} \omega_{Л_2}$.

1 *c*. $I_З \omega_{З_1} + I_{Л_1} \omega_{Л_1} = L_1 \approx I_{Л_2} \omega_{Л_2}$.

2. Конечные расстояние и угловая скорость движения системы Земля-Луна

2 *a*. $\omega_2^2 D_2^3 = GM_З$.

2 *b*. $D_2 = \dfrac{L_1^2}{GM_З M_Л^2}$.

2 *c*. $\omega_2 = \dfrac{G^2 M_З^2 M_Л^3}{L_1^3}$.

2 *d*. В нашей модели момент инерции Земли будет эквивалентен моменту инерции шара с радиусом r_0 и плотностью ρ_0 и шара радиусом r_1 и плотностью $\rho_1 - \rho_0$:

$$I_З = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5 \rho_0 + r_1^5(\rho_1 - \rho_0)\right].$$

2 *e*. $$\frac{2}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5 \rho_0 + r_1^5(\rho_1 - \rho_0)\right] = 8{,}0\cdot 10^{37}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

2 *f*. $$L_1 = I_З \omega_{З_1} + I_{Л_1} \omega_{Л_1} = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\text{с}^{-1}.$$

2 *g*. $D_2 = 5{,}4\cdot 10^8$ м, получается

$$D_2 = 1{,}4\, D_1.$$

2 *h*. $\omega_2 = 1{,}6\cdot 10^{-6}\ c^{-1}$, это соответствует периоду в 46 суток.

2 *i*. Сравним

$$I_З \omega_2 = 1{,}3\cdot 10^{32}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\ \text{с}^{-1}$$

и $$I_{Л_2} \omega_2 = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\ \text{с}^{-1}.$$

Приближение оправдано, т. к. окончательный момент импульса Земли намного меньше окончательного момента импульса Луны, а точнее, относится к нему как 1 к 260.

3. Насколько Луна удаляется за год?

3 *a*. Используя теорему косинусов, получим, что ближний объект массой m притягивается к Луне с силой:

$$F_c = \frac{GM_Л \cdot m}{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos\theta}.$$

3 *b*. Используя теорему косинусов, получим, что дальний объект массой m притягивается к Луне с силой:

$$F_f = \frac{GM_Л \cdot m}{D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos\theta}.$$

3 *c*. Используя теорему синусов, получаем выражение для момента силы, действующего со стороны ближнего объекта на Луну:

$$\tau_c = \frac{GmM_Л r_0 D_1 \sin\theta}{[D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0 \cos\theta]^{3/2}}.$$

3 *d*. Используя теорему синусов, получаем выражение для момента силы, действующего со стороны дальнего объекта на Луну:

$$\tau_f = \frac{GmM_Л r_0 D_1 \sin\theta}{[D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0 \cos\theta]^{3/2}}.$$

3 *e*. $\tau_c - \tau_f \approx GmM_Л r_0 D_1^{-2} \sin\theta \times$

$$\times\left(1 - \frac{3r_0^2}{2D_1^2} + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1} - 1 + \frac{3r_0^2}{2D_1^2} + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1}\right) =$$

$$= \frac{6GmM_Л r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^2}.$$

3 *f*. $\tau = \dfrac{6GmM_Л r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3} =$

$$= 4{,}1\cdot 10^{16}\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

3 *g*. Из закона всемирного тяготения имеем $\omega_{Л_1}^2 D_1^3 = GM_З$. Из этого следует, что момент импульса Луны

$$I_{Л_1}\omega_{Л_1} = M_Л D_1^2 \left[\frac{GM_З}{D_1^3}\right]^{1/2} =$$

$$= M_Л [D_1 GM_З]^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\tau = \frac{M_Л [GM_З]^{1/2} \Delta\left(D_1^{1/2}\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{M_Л [GM_З]^{1/2} \Delta D_1}{2[D_1]^{1/2} \Delta t}.$$

Используя две предыдущие формулы, мы получаем, что

$$\Delta D_1 = \frac{2r\Delta t}{M_Л} = \left(\frac{D_1}{GM_З}\right)^{1/2}.$$

Для $\Delta t = 1\ \text{год} = 3{,}1\cdot 10^7$ с. получаем $\Delta D_1 = 0{,}034$ м. На столько увеличивается ежегодное расстояние между Землёй и Луной.

3 *h*. Сейчас используем $\tau = -\dfrac{I_З \Delta\omega_{З_1}}{I_З}$, отсюда получаем, что

$$\Delta\omega_{З_1} = -\frac{\tau\Delta\tau}{I_З}.$$

Используем $\Delta t = 1\ \text{год} = 3{,}1\cdot 10^7$ с, получаем $\Delta\omega_{З_1} = -1{,}6\cdot 10^{-14}\ \text{с}^{-1}$. Если $T_З$ – период, то $\dfrac{\Delta T_З}{T_З} = -\dfrac{\Delta\omega_{З1}}{\omega_{З1}}$ за 1 день

$$\Delta T_З = 1{,}9\cdot 10^{-5}\ \text{с}.$$

4. Куда уходит энергия?

4 *a*. Полная энергия системы Земля-Луна

$$E = \frac{1}{2} I_З \omega_{З_1}^2 + \frac{1}{2} I_Л \omega_{Л_1}^2 - \frac{GM_З M_Л}{D_1}.$$

Используя, что $\omega_{Л_1}^2 D_1^3 = GM_З$, получаем:

$$E = \frac{1}{2} I_З \omega_{З_1}^2 - \frac{1}{2}\frac{GM_З M_Л}{D_1}.$$

4 *b*. $\Delta E = I_З \omega_{З_1} \Delta\omega_{З_1} +$

$$+ \frac{1}{2}\frac{GM_Л M_З}{D_1^2}\Delta D_1 = -9{,}0\cdot 10^{10}\ \text{Дж}.$$

4 *c*. $M_{\text{вода}} = 4\pi r_0^2 h \rho_{\text{вода}} =$

$$= 2{,}6\cdot 10^{17}\ \text{кг}.$$

4 *d*. $\Delta E_{\text{вода}} = -gM_{\text{вода}} h \cdot 2\text{дня}^{-1} \times$

$\times 365\ \text{дней} \cdot 0{,}1 = -9{,}3\cdot 10^{19}$ Дж. Как видим, этот результат хорошо согласуется с предыдущим.

Теоретическая задача 2.
Лазерное охлаждение атомов и «оптическая патока»

Ключом к решению данной проблемы является эффект Доплера (точнее, продольный эффект Доплера). Частота монохроматического света, фиксируемая наблюдателем, зависит от скорости источника v относительно наблюдателя, для которого частота:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1\pm\frac{v}{c}}{1\mp\frac{v}{c}}} \approx \omega\left(1\pm\frac{v}{c}\right),$$

где ω – частота источника. Верхние и нижние знаки в формуле обозначают, соответственно, движение источника и наблюдателя навстречу друг другу и наоборот. Второе равенство справедливо в приближении малых скоростей (нерелятивистское приближение).

Частота лазера в лабораторной системе отсчёта ω_L; ω_0 – резонансная частота атомного перехода; атом движется со скоростью v навстречу лазерному пучку.

Важно отметить, что результат должен быть приведён с точностью до первого порядка величин v/c или $\hbar q/mv$, где $q=\dfrac{\omega_L}{c}$.

Часть 1. Основы лазерного охлаждения

1. Поглощение

1 *a*. Запишем условие резонансного поглощения фотона:

$$\omega_0 \approx \omega\left(1\pm\frac{v}{c}\right).$$

1 *b*. Запишем выражение для импульса атома $p_{\text{ат}}$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчёта:

$$p_{\text{ат}} = p - \hbar q \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}.$$

1 *c*. Запишем выражение для полной энергии атома $\varepsilon_{\text{ат}}$ после поглощения фотона в лабораторной системе отсчёта:

$$\varepsilon_{\text{ат}} = \frac{p_{\text{ат}}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L.$$

2. Спонтанное излучение фотона в направлении –x

Прежде мы вычислили энергию испущенного фотона в лабораторной системе отсчёта. Требуется сохранять нужный порядок малости, потому что скорость атома меняется в результате поглощения, однако это изменение частоты во втором порядке малости:

$$\omega_{\text{ф}} \approx \omega_0\left(1-\frac{v'}{c}\right),$$

где $v' \approx v - \dfrac{\hbar q}{m}$. Таким образом:

$$\omega_{\text{ф}} \approx \omega_0\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right) \approx$$

$$\approx \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right) \approx \omega_L\left(1+\frac{\hbar q}{mc}\right) \approx$$

$$\approx \omega_L\left(1+\left(\frac{\hbar q}{mc}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right) \approx \omega_L.$$

2 *a*. Запишем выражение для энергии фотона $\varepsilon_{\text{ф}}$, излучённого в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$\varepsilon_{\text{ф}} \approx \hbar\omega_L.$$

2 *b*. Запишем выражение для импульса фотона $p_{\text{ф}}$, излучённого в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$p_{\text{ф}} \approx -\hbar\omega_L/c.$$

Используем закон сохранения импульса (см. 1 *b*):

$$p_{\text{ат}} + p_{\text{ф}} \approx p - \hbar q.$$

2 *c*. Запишем выражение для импульса атома $p_{\text{ат}}$ после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$p_{\text{ат}} \approx p = mv.$$

2 *d*. Запишем выражение для энергии атома $\varepsilon_{\text{ат}}$ после процесса излучения фотона в направлении $-x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$\varepsilon_{\text{ат}} \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}.$$

3. Спонтанное излучение фотона в направлении +x

Всё то же, что и в прошлом вопросе, сохраняем правильный порядок малости:

3 *a*. Запишем выражение для энергии фотона $\varepsilon_ф$, излучённого в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$\varepsilon_ф \approx \hbar\omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx$$
$$\approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right).$$

3 *b*. Запишем выражение для импульса фотона $p_ф$, излучённого в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$p_ф \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right).$$

3 *c*. Запишем выражение для импульса атома $p_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$p_{ат} = p - \hbar q - p_ф \approx p - \hbar q -$$
$$-\frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right) \approx mv - 2\frac{\hbar\omega_L}{c}.$$

3 *d*. Запишем выражение для импульса фотона $\varepsilon_{ат}$ после процесса излучения фотона в направлении $+x$ в лабораторной системе отсчёта:

$$\varepsilon_{ат} = \frac{p_{ат}^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-2\frac{\hbar q}{mv}\right).$$

4. Усреднённое излучение после поглощения

Процесс спонтанного излучения происходит с равной вероятностью в обоих направлениях.

4 *a*. Запишем выражение для средней энергии излучённого фотона $\bar{\varepsilon}_ф$:

$$\bar{\varepsilon}_ф = \frac{1}{2}\varepsilon_ф^+ + \frac{1}{2}\varepsilon_ф^- \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

4 *b*. Запишем выражение для среднего значения импульса излученного фотона $p_ф$:

$$\bar{p}_ф = \frac{1}{2}p_Ф^+ + \frac{1}{2}p_Ф^- \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\frac{v}{c} =$$
$$= mv\left(\frac{\hbar q}{mv}\frac{v}{c}\right) \approx 0$$

(второй порядок малости).

4 *c*. Запишем выражение для средней энергии атома $\bar{\varepsilon}_{ат}$ после процесса излучения фотона:

$$\bar{\varepsilon}_{ат} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ат}^+ + \frac{1}{2}\varepsilon_{ат}^- \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{\hbar q}{mv}\right).$$

4 *d*. Запишем выражение для среднего значения импульса атома $p_{ат}$ после процесса излучения фотона:

$$\bar{p}_{ат} = \frac{1}{2}p_{ат}^+ + \frac{1}{2}p_{ат}^- \approx p - \frac{\hbar\omega_L}{c}.$$

5. Передача энергии и импульса

Если принять, что процесс поглощения и излучения одного фотона происходит так, как он описан выше, в среднем существует перенос энергии и импульса от лазера к атому.

5 *a*. Запишем выражение для среднего изменения энергии атома $\Delta\varepsilon$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона:

$$\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{ат}^{после} - \bar{\varepsilon}_{ат}^{до} \approx -\frac{1}{2}\hbar qv = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L\frac{v}{c}.$$

5 *b*. Запишем выражение для среднего изменения импульса атома Δp в результате полного процесса поглощения и излучения фотона:

$$\Delta p = \bar{p}_{ат}^{после} - \bar{p}_{ат}^{до} \approx -\hbar q = -\frac{\hbar\omega_L}{c}.$$

6. Передача энергии импульса лазерным пучком, распространяющимся в направлении +x

6 *a*. Запишем выражение для среднего изменения энергии атома $\Delta\varepsilon$ в результате полного процесса поглощения и излучения фотона:

$$\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{ат}^{после} - \bar{\varepsilon}_{ат}^{до} \approx +\frac{1}{2}\hbar qv = +\frac{1}{2}\hbar\omega_L'\frac{v}{c}.$$

6 *b*. Запишем выражение для

среднего изменения импульса атома Δp в результате полного процесса поглощения и излучения фотона:

$$\Delta p = \bar{p}_{\text{ат}}^{\text{после}} - \bar{p}_{\text{ат}}^{\text{до}} \approx +\hbar q = +\frac{\hbar\omega_L}{c}.$$

Часть 2. Диссипация энергии и явление «оптической патоки»

Два распространяющихся в противоположных направлениях лазерных пучка имеют *одинаковую*, но *произвольную* частоту ω_L, и взаимодействуют с газом из N атомов, которые движутся в направлении $+x$ со (средней) скоростью v.

7. Сила, действующая на атомный пучок со стороны лазеров

В среднем доля атомов, находящихся в возбуждённом состоянии, выражается как:

$$P_{\text{возб}} = \frac{N_{\text{возб}}}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2},$$

где ω_0 – резонансная частота атомного перехода, а Ω_R – так называемая частота Раби; Ω_R^2 пропорциональна *интенсивности* лазерного пучка. Время нахождения атома в возбужденном состоянии Γ^{-1}.

Сила вычисляется как количество циклов поглощения-испускания, умноженное на изменение импульса, делённое на время этого события.

Внимание! Примите во внимание доплеровский сдвиг частоты лазера в системе отсчёта атомов.

7 *a*. Используя предыдущую информацию, найдите силу, с которой лазерные пучки действуют на атомы. Считайте, что $mv \gg \hbar q$.

$$F = N\Delta p^- p_{\text{возб}}^- \Gamma + N\Delta p^+ p_{\text{возб}}^+ \Gamma =$$

$$= \left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L + \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L - \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} \right) N\Gamma\hbar q.$$

8. Предел малой скорости

Предполагая, что скорость атомов достаточно мала, можно получить выражение для силы в первом порядке малости по v.

8 *a*. Найдём выражение для силы, полученной в вопросе 7 *a* для этого приближения:

$$F \approx -\frac{4N\hbar q^2 \Omega_R^2 \Gamma(\omega_0 - \omega_L)v}{\left((\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2}.$$

8 *b*. Запишем условие для получения положительной силы (ускорение атомов):

$$\omega_0 < \omega_L.$$

8 *c*. Запишем условие для получения нулевой силы:

$$\omega_0 = \omega_L.$$

8 *d*. Запишем условие для получения отрицательной силы (замедление атомов):

$$\omega_0 > \omega_L.$$

Это известное правило «настраивай установку до резонанса, чтобы охладить».

8 *e*. Теперь предположим, что атомы движутся со скоростью $-v$ (в направлении $-x$). Запишем условие получения отрицательной силы (замедление атомов):

$$\omega_0 > \omega_L,$$

т. е. это не зависит от направления движения атома.

9. «Оптическая патока»

В случае отрицательной силы возникает диссипация (трение). Предположим, что первоначально при $t=0$ газ из атомов имеет скорость v_0.

9 *a*. В пределах малых скоростей найдите скорость атомов через время τ после включения лазера;

$$F=-\beta v \Rightarrow m\frac{dv}{dt}\approx-\beta v \Rightarrow v=v_0 e^{-\beta t/m}$$

(β может быть найден из 8 *a*).

9 *b*. Теперь предположим, что газ из атомов находится в тепловом равновесии при температуре T_0. Найдём температуру T после того, как пучки были выключены через время τ.

Напомним, что $\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}kT$ в первом приближении, и используя в качестве v в выражении 9 *a* среднюю тепловую скорость движения атомов, запишем:

$$T=T_0 e^{-2\beta t/m}.$$

Теоретическая задача 3. Почему звёзды такие большие?

1. Классическая оценка температуры в центре звёзд

1 *a*. Приравниваем начальную кинетическую энергию двух протонов к потенциальной энергии их электростатического взаимодействия на расстоянии максимального сближения:

$$2\left(\frac{1}{2}m_p v_{\text{ср.кв.}}^2\right)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c};$$

затем $\frac{3}{2}kT_c=\frac{1}{2}m_p v_{\text{ср.кв.}}^2$, вычисляем

$$T_c=\frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k}=5{,}5\cdot10^9\ \text{K}.$$

2. Почему предыдущая оценка температуры неверна

2 *a*. Мы получаем:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r}=-\frac{GM_r\rho_r}{r^2},$$

используя данное допущение, получаем:

$$P_c=\frac{GM\rho_c}{R}.$$

Значит, давление идеального газа равно

$$P_c=\frac{2\rho_c kT_c}{m_p},$$

где k – это постоянная Больцмана, T_c – это температура в центре звезды и m_p – масса протона. Коэффициент «2» появляется из-за того, что мы имеем две частицы на одну протонную массу, которые дают одинаковый вклад в давление. Приравнивая два последних выражения, мы окончательно выводим:

$$T_c=\frac{GMm_p}{2kR}.$$

2 *b*. Из пункта (2 *a*) мы получаем:

$$\frac{M}{R}=\frac{2kT_c}{Gm_p}.$$

2 *c*. Из пункта (2 *b*) мы вычисляем, что при $T_c=5{,}5\cdot10^9$ К:

$$\frac{M}{R}=\frac{2kT_c}{Gm_p}=1{,}4\cdot10^{24}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

2 *d*. Для Солнца мы получаем:

$$\frac{M_c}{R_c}=2{,}9\cdot10^{21}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

Как видим, этот результат на три порядка меньше.

3. Оценка температуры в центре звезды на основе квантовой физики

3 *a*. Мы имеем следующее:

$$\lambda_p=\frac{h}{m_p v_{\text{ср.кв.}}},$$

Затем $\frac{3}{2}kT_c=\frac{1}{2}m_p v_{\text{ср.кв.}}^2$,

$$T_c=\frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k},$$

мы получаем:

$$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2}.$$

3 *b*. $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2} = 9{,}7\cdot10^6$ K.

3 *c*. Из пункта (2 *b*) мы вычисляем, что для $T_c = 9{,}7\cdot10^6$ K:

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2{,}4\cdot10^{21}\ \text{кг}\cdot\text{м}^{-1};$$

в то же время для Солнца мы получаем:

$$\frac{M_c}{R_c} = 2{,}9\times10^{21}\ \text{кг}\cdot\text{м}^{-1}.$$

4. Отношение массы к радиусу для звёзд

4 *a*. Принимая во внимание, что

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}$$

и что

$$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2},$$

мы получаем

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

5. Масса и радиус самых маленьких звёзд

5 *a*. $n_e = \frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}.$

5 *b*.

$$d_e = n_e^{-1/3} = \left(\frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}\right)^{-1/3}$$

5 *c*. Предполагаем, что

$$d_e \ge \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}.$$

Далее

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{\text{ср.кв.эл.}}},$$

$$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_e v^2_{\text{ср.кв.эл.}},\quad T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2},$$

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2},\ \text{и}$$

$$d_e = \left(\frac{M}{(4/3)\pi R^3 m_p}\right)^{-1/3},$$

Откуда получаем, что

$$R \ge \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}}.$$

5 *d*.

$$R \ge \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} =$$

$$= 6{,}9\cdot10^7\ \text{м} = 0{,}10\ R_C.$$

5 *e*. Отношение массы к радиусу равно

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2} = 2{,}4\cdot10^{21}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}},$$

откуда мы вычисляем, что:

$$M \ge 1{,}7\cdot10^{29}\ \text{кг} = 0{,}09\ M_c.$$

6. Синтез на основе ядер гелия в старых звёздах

6 *a*. Для гелия мы имеем:

$$\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0\, m_{He}\, v^2_{\text{ср.кв.}}(He)} = \frac{h}{2^{1/2}\, m_{He}\, v_{\text{ср.кв.}}(He)},$$

откуда получаем:

$$v_{\text{ср.кв.}}(He) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h} = 2{,}0\cdot 10^6\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Отсюда выводим:

$$T(He) = \frac{v^2_{\text{ср.кв.}}(He)\, m_{He}}{3k} = 6{,}5\cdot 10^8\ \text{К}.$$

Это значение имеет другой порядок по сравнению со значениями из оценок в рамках звёздных моделей.

Материал предоставили В.П. Слободянин, С.М. Козел.

Новости Новости Новости Новости Новости

Фильтры из «трековых» мембран

В лечебных учреждениях, в некоторых исследовательских лабораториях, на высокотехнологичных промышленных и фармацевтических производствах и во многих других случаях – рабочие помещения должны быть абсолютно чистыми – не только без грязи и пыли, но и без посторонних микрочастиц в воздухе. Так что воздух в них приходится тщательно фильтровать, а для этого максимально уменьшать поры фильтра.

Российские учёные Исследовательского центра прикладной ядерной физики в г. Дубне Московской обл. разработали уникальную технологию создания мембран для фильтров с отверстиями наноразмеров. Эти мембраны называют «трековыми» (иногда «ядерными»), так как получают их следующим образом. Тяжёлые ионы или осколки ядер, получаемые в результате реакции деления урана-235 при облучении его нейтронами, ускоряют и направляют на непористую полимерную плёнку, например лавсановую. Проходя сквозь неё, частицы оставляют в лавсане треки, которые затем протравливают – образуется множество (до 100 млн на 1 см^2) цилиндрических отверстий.

По сравнению с обычными «трековые» мембраны обладают важными преимуществами: они гораздо тоньше (их толщина ~ 10 мкм), все их поры имеют практически одинаковые размеры, причём их диаметр (зависящий от используемых для облучения частиц) может быть заранее задан в диапазоне от 30 до 1000 нм. Очень ценно то, что «трековые» мембраны позволили создать индивидуальные респираторы для защиты человека от токсичных бактерий и вирусов, что позволяет обеспечить безопасность контактов с инфицированными больными, с источниками патогенных вирусов. Аналогов этим респираторам в мире нет, а необходимы они большому числу специалистов: сотрудникам санитарно-эпидемиологической службы, министерства чрезвычайных ситуаций, инфекционных медицинских учреждений, и т. д.