



ХLI Международная олимпиада школьников по физике (Загреб, Хорватия, 17 – 25 июля 2010 г.)

Теоретический тур.

Условия

В этом году Международная олимпиада школьников по физике проходила в Республике Хорватия в период с 17 по 25 июля. На олимпиаду прибыли 376 школьников из 82 стран. (Для сравнения заметим, что в прошлом году на олимпиаде в Мексике было 316 участников из 69 стран.)

В сборную команду России вошли:

1. Карелина Любовь. Обучалась в МОУ «Гимназия № 9» г. Екатеринбург, затем в СУНЦ УрГУ. Наставник по физике: Иванова Наталья Вадимовна (учитель физики гимназии № 9 г. Екатеринбург);

2. Алексеев Алексей. Обучался в Бийском лицее-интернате Алтайского края. Наставники по физике: Аполонский Александр Николаевич и Моргунов Михаил Николаевич (учителя физики Бийского лицея);

3. Анаскин Виктор. Обучался в Бийском лицее-интернате Алтайского края. Наставники по физике: Аполонский Александр Николаевич и Моргунов Михаил Николаевич (учителя физики Бийского лицея);

4. Горностаев Дмитрий. Обучался в средней образовательной школе Республики Мордовия, Теньгушевский р-н, с. Шокша. Наставник по физике: Подлесный Дмитрий Владимирович, зав. кафедрой физики Саровского физико-технического института;

5. Стройнов Евгений. Обучался в МОУ «Лицей № 52» г. Рязани, а затем в ГОУ СУНЦ-факультет МГУ им.

М.В. Ломоносова. Наставник по физике: Окс Сергей Николаевич, учитель физики СУНЦ МГУ.

Нашу команду возглавляли: профессор Московского физико-технического института Станислав Миронович Козел и доцент МФТИ Валерий Павлович Слободянин. В составе российской делегации в качестве наблюдателей были: доцент МФТИ Дмитрий Анатольевич Александров и научный сотрудник ЦАГИ Осин Михаил Николаевич.

Подготовка команды уже многие годы проводится по стандартной схеме. За год до Международной олимпиады на Заключительном этапе Всероссийской олимпиады формируется группа кандидатов в количестве 22 – 24 человек. Они получают задание для подготовки к первым летним сборам, которые проходят в г. Долгопрудном на базе Московского физико-технического института. На этих сборах в течение девяти дней ребята изучают технику физического эксперимента, выполняют разработанные специально для них экспериментальные задания. Шестнадцать участников с наивысшим рейтингом получают приглашение на зимние квалификационные сборы. На этих сборах в течение нескольких дней продолжается освоение техники физического эксперимента и изучение наиболее сложных вопросов теории. А затем



«сборники» выполняют три теоретических и два экспериментальных тура. В итоге достаточно чётко определяется костяк сборной команды.

Окончательный состав участников последних летних сборов определился в апреле по итогам Заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

Как и в прошлые годы, 8 человек были приглашены на последние трёхнедельные летние сборы, на которых отрабатывались навыки экспериментальной работы на сложном современном оборудовании и дополнительно изучались элементы специальной теории относительности, волновой оптики, ядерной физики и ряд других тем, входящих в программу МФО.

Во время сборов с командой работали преподаватели кафедр общей физики МФТИ, СУНЦ МГУ, научные со-

трудники институтов Российской академии наук, а также студенты Физтеха – победители Международных физических олимпиад прошлых лет.

В Хорватию наша сборная прилетела за день до открытия олимпиады и, таким образом, у ребят было время на адаптацию.

Последствия финансового кризиса были весьма заметны на организации всех мероприятий олимпиады...

Сразу после церемонии открытия лидеры команд приступили к обсуждению задач. Поскольку в этом действии участвует около двухсот человек, то принятие окончательного решения сильно затягивается. К переводу условий задач на русский язык мы смогли приступить далеко за полночь.

Ниже приведены тексты, которые утром получили наши школьники.

Теоретические задачи

На теоретическом туре участникам было предложено три задачи из разных разделов физики.

Первая задача состояла из четырёх заданий и была на метод электрических изображений в электростатике. Этот метод изучается в вузовской программе. Поэтому организаторы

воспользовались приёмом, ставшим традиционным на Международных физических олимпиадах: во вводной части задания кратко излагалась идея метода, после чего следовал текст задания. С этой задачей наши ребята успешно справились, набрав за её выполнение 82% возможных баллов.

1. Заряд-изображение в проводнике

Введение. Метод изображений. На расстоянии d от центра металлической *заземлённой* сферы S радиуса R находится точечный заряд q . При этом на сфере появляется индуцированный заряд, распределённый по её поверхности с некоторой поверхностной плотностью.

Электрическое поле и потенциал, которые создают заряды, индуцированные на поверхности сферы, совпадают с электрическим полем и потенциалом, создаваемыми одним точечным зарядом q' , который находится внутри сферы (рис. 1).

Задание 1. Заряд – изображение.

- Чему равен потенциал сферы?
- Выразите q' и d' (расстояние от центра сферы S до заряда-изображения q') через величины q , d и R .
- Получите выражение для силы,

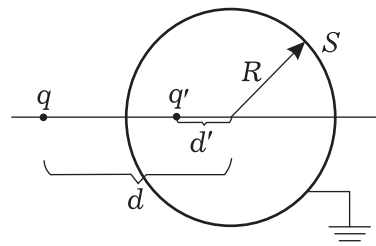


Рис. 1



которая действует на заряд q . Отталкивающая ли эта сила?

Задание 2. Электрическое поле, экранированное сферой. Точечный заряд находится на расстоянии d от центра заземлённой металлической сферы радиуса R . Необходимо определить, как влияет заземлённая металлическая сфера на электрическое поле в точке A с противоположной стороны сферы (рис. 2). Точка A находится на прямой, соединяющей заряд q и центр сферы. Расстояние от точки A до точечного заряда q равно r .

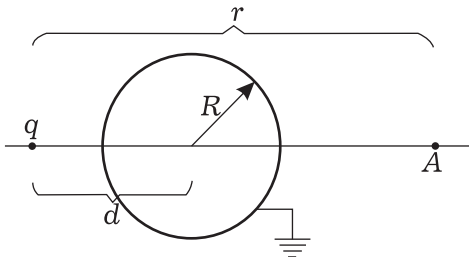


Рис. 2

а) Определите вектор напряжённости электрического поля в точке A .

б) Запишите выражение для напряжённости электрического поля на большом расстоянии r от заряда ($r \gg d$). Используйте приближение:

$$(1+a)^{-2} \approx 1-2a, \text{ при } a \ll 1.$$

в) Определите расстояние d , при котором заземлённая металлическая сфера полностью экранирует поле заряда q (напряжённость поля в точке A равна 0).

Задание 3. Малые колебания в поле заземлённой металлической сферы. Точечный заряд q массой m подвешен на нити длиной L , закреплённой на стене вблизи заземлённой металлической сферы. Точка, в которой нить крепится к стене, находится на расстоянии l от центра сферы. При решении задания не учитывайте электростатическое влияние стены, а также действие гравитационных сил. Точечный заряд рас-

сматривайте как математический маятник (рис. 3).

а) Определите силу, которая действует на заряд q при заданном угле α . Укажите направление силы на рисунке.

б) Выразите проекцию этой силы на ось, перпендикулярную нити через l, L, R, q и α .

в) Определите частоту малых колебаний маятника.

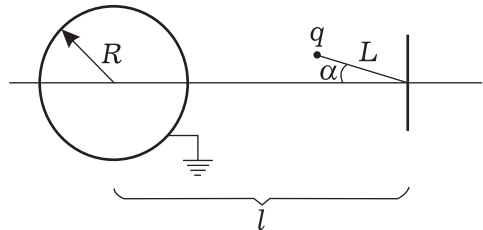


Рис. 3

Задание 4. Электростатическая энергия системы. Вычислим энергию электростатического взаимодействия в такой системе. Не забудьте про взаимодействие между самими индуцированными зарядами. Считая известными заряд q , радиус сферы R и расстояние d , определите:

а) электростатическую энергию взаимодействия заряда q и индуцированных зарядов на поверхности сферы;

б) электростатическую энергию взаимодействия зарядов, индуцированных на поверхности сферы;

в) полную электростатическую энергию взаимодействия системы.

Указание. Вы можете воспользоваться интегралом:

$$\int \frac{x dx}{d(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

Во второй задаче участникам было предложено рассчитать дымоходную трубу гипотетического промышленного предприятия. Эта задача тоже состояла из четырёх заданий. Два члена нашей команды, что называется, перемудрили... В итоге за неё мы набрали 50% от возможного числа баллов.



2. Физика дымовой трубы

Введение. Газообразные продукты горения из топки выводятся в атмосферу, имеющую температуру $T_{\text{воз}}$, с помощью высокой дымовой трубы с поперечным сечением S и высотой h (рис. 4). В топке происходит сгорание твёрдого топлива при температуре $T_{\text{дым}}$. Объём газов, выходящих из трубы за единицу времени, равен B .

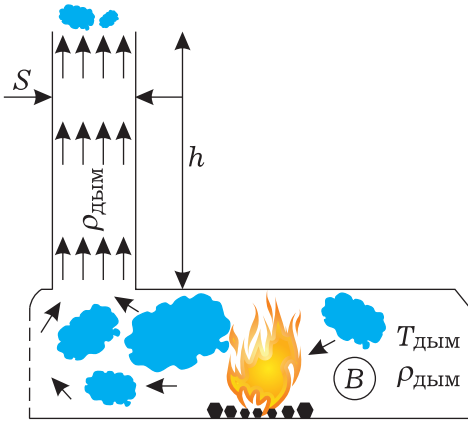


Рис. 4

Предполагается, что:

- скоростью газов на входе в топку можно пренебречь;
- образовавшиеся газы имеют такую же плотность, как и воздух при тех же температуре и давлении; пока газ находится в топке, его можно рассматривать как идеальный;
- давление воздуха изменяется с высотой в соответствии с законами гидростатики; изменением плотности воздуха с высотой можно пренебречь;
- течение газов удовлетворяет уравнению Бернулли, которое утверждает, что величина

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{const}$$

сохраняется в любой точке потока; здесь ρ – плотность газа, $v(z)$ – его скорость, $p(z)$ – его давление, z – высота;

- изменением плотности газов вдоль трубы можно пренебречь.

Задание 1.

а) Какова должна быть минимальная высота трубы для обеспечения её нормальной работы, чтобы она могла отводить в атмосферу все образующиеся в топке газы? Выразите результат через B , S , $T_{\text{воз}}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\Delta T = T_{\text{дым}} - T_{\text{воз}}$. Внимание! В каждом последующем задании предполагается, что высота трубы как раз равна найденной здесь минимальной высоте.

б) Предположим, что построены две дымовые трубы, предназначенные для одних и тех же целей. Они имеют одинаковое поперечное сечение, но предназначены для работы в различных местностях: одна – в холодной местности, где средняя температура воздуха равна -30°C , а другая – в тёплой местности, где средняя температура воздуха равна 30°C . Температура выделяющихся

газов составляет 400°C . Если расчётная высота трубы в холодной местности равна 100 м, то какова должна быть высота трубы в тёплой местности?

в) Как изменяется скорость течения газов вдоль трубы? Нарисуйте график этой зависимости, предполагая, что поперечное сечение трубы постоянно. Обозначьте на графике точку вхождения газов в трубу.

г) Как изменяется давление газов с высотой внутри трубы?

Солнечная электростанция

Движение газов через трубу можно использовать для создания солнеч-

ной электростанции. Идею такой электростанции иллюстрирует рисунок 5.



Солнце нагревает воздух под коллектором площадью S_k , который открыт по периметру, чтобы воздух мог свободно поступать внутрь. Тёплый воздух поднимается вверх по дымоходу (тонкие сплошные стрелки), а холодный поступает в коллектор извне (толстые пунктирные стрелки), тем самым обеспечивается непрерывная циркуляция воздуха. Поток воздуха приводит в движение турбину, таким образом вырабатывается электрическая энергия. Энергию солнечного излучения, падающего на единицу площади поверхности коллектора за единицу времени, обозначим через G . Предположим, что вся эта энергия идёт на нагревание воздуха в коллекторе (удельная теплоёмкость воздуха равна c , её зависимость от температуры можно пренебречь). КПД солнечной электростанции на основе трубы определим как отношение кинетической энергии потока воздуха в трубе к энергии солнечного излучения, идущей на нагревание этой же массы воздуха перед поступлением в трубу.

Задание 2.

а) Каков КПД солнечной электростанции на основе трубы?

б) Нарисуйте график, показывающий, как изменяется КПД электростанции в зависимости от высоты трубы



Рис. 5. Схема солнечной электростанции на основе трубы

Опытная электростанция в Манзанаресе. Опытная солнечная электростанция на основе трубы, построенная в Манзанаресе (Испания), имеет трубу высотой 195 м и радиусом 5 м, диаметр коллектора равен 244 м. Удельная теплоёмкость воздуха $c = 1012$ Дж/(кг·К), плотность нагретого воздуха $0,9$ кг/м³, средняя температура окружающего воздуха $T_{\text{атм}} = 295$ К. В Манзанаресе в течение солнечного дня мощность солнечного излучения на единицу площади в среднем равна 150 Вт/м².

Задание 3.

а) Чему равен КПД опытной электростанции? Оцените его численно.

б) Какова максимальная мощность опытной электростанции?

в) Сколько энергии даёт электростанция в течение одного типичного солнечного дня?

Задание 4.

а) На сколько возрастёт температура воздуха при входе в трубу (тёплый воздух) относительно температуры окружающего воздуха (холодный воздух)? Запишите общую формулу и сделайте оценку для опытной электростанции.

б) Чему равен массовый поток воздуха через систему?

Третья задача была на вывод формулы Вайцзеккера (капельная модель атомного ядра). Эта формула позволяет вычислить энергию связи нуклонов в атомном ядре и объяснить ряд свойств атомных ядер. При выполнении данной задачи участники должны были проделать довольно громоздкие алгебраические преобразования. Трое из нашей пятёрки запутались в выкладках. Как следствие – 40% возможных баллов.



3. Упрощённая модель атомного ядра

Введение. Несмотря на то, что атомное ядро – квантовый объект, некоторые закономерности, касающиеся его свойств (таких как радиус и энергия связи), можно вывести из нескольких простых положений:

а) ядро состоит из нуклонов (протонов и нейтронов);

б) ядерные силы, связывающие нуклоны в ядре, являются короткодействующими (они действуют только между соседними нуклонами);

в) количество протонов (Z) в ядре приблизительно равно количеству нейтронов (N), то есть $Z \approx N \approx A/2$, где A – общее количество нуклонов ($A \gg 1$).

Задание 1. Атомное ядро как плотно упакованная система нуклонов. Согласно простейшей модели, ядро можно представить как шар, плотно заполненный нуклонами, которые представляют собой шарики радиуса $r_N = 0,85$ фм ($1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$). Ядерные силы действуют только при непосредственном контакте двух нуклонов. Объём ядра V больше суммы объёмов нуклонов AV_N , где $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$ – объём нуклона. Отношение $f = AV_N/V$ называется фактором упаковки и представляет собой относительную часть объёма, заполненную ядерным веществом.

а) Определите фактор упаковки f , если нуклоны упакованы как в простой кубической кристаллической решётке (англ. simple cubic, SC), где каждый нуклон занимает место в вершинах куба (рис. 6).

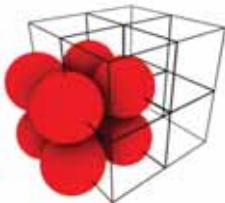


Рис. 6. SC-упаковка

Внимание! В каждом последующем задании считайте фактор упаковки атомных ядер равным фактору упаковки, полученному в задании 1 а. Если вы не смогли его вычислить, в дальнейшем используйте $f = 1/2$.

б) Оцените среднюю плотность массы ρ_m , плотность заряда ρ_q и радиус R ядра, имеющего A нуклонов. Средняя масса нуклона равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задание 2. Энергия связи атомных ядер – объёмные и поверхностные факторы. Энергия связи – это энергия, необходимая для разделения ядра на отдельные нуклоны. Если данный нуклон находится внутри ядра, то он вносит в полную энергию связи энергию $a_V = 15,8$ МэВ

($1 \text{ МэВ} = 1,602 \cdot 10^{-13}$ Дж). Вклад одного нуклона, находящегося на поверхности ядра, в общую энергию связи приблизительно равен $a_V/2$.

Выразите энергию связи ядра E_b , содержащего A нуклонов, через величины A , a_V и f . Сделайте поправку на то, что часть нуклонов находится на поверхности ядра.

Задание 3. Влияние электростатических (кулоновских) сил на энергию связи. Электростатическая энергия однородно по объёму заряженного шара радиуса R (общий заряд Q_0) равна $U_C = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}$, где

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

а) Используя эту формулу, выразите электростатическую энергию ядра. В ядре между протонами действуют кулоновские силы, причём сам на себя протон кулоновскими силами не действует. Это обстоятельство можно учесть путём замены $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$. Используйте данную поправку в дальнейших расчётах.



б) Запишите полную формулу для энергии связи, включающую основной (объёмный) фактор, а также поправки на поверхностную энергию и энергию электростатического взаимодействия протонов.

Задание 4. Деление тяжёлых ядер. Деление ядер – это процесс расщепления ядра на части (на более лёгкие ядра). Предположите, что ядро с A нуклонами распадается на два одинаковых осколка.

а) Подсчитайте общую кинетическую энергию $E_{кин}$ в момент, когда центры этих осколков находятся на расстоянии $d \geq 2R(A/2)$, где $R(A/2)$ – радиус каждого осколка. Большое ядро в начальный момент времени находилось в состоянии покоя.

б) Предположим, что $d = 2R(A/2)$. Подсчитайте $E_{кин}$ по формуле, полученной в части а), для ядер с $A = 100, 150, 200, 250$ (результат выразите в МэВ). Оцените, для каких значений A возможно деление ядра в рамках данной модели?

Задание 5. Реакции передачи.

а) В современной физике энергетические свойства ядер и ядерные реакции описываются в единицах массы. Например, если ядро (имеющее нулевую скорость), находится в возбуждённом состоянии с энергией выше основного состояния на величину $E_{воз}$, его масса $m = m_0 + E_{воз}/c^2$, где m_0 – масса покоящегося ядра в основном состоянии.

Ядерная реакция $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ – это пример так называемой реакции передачи, в которой некоторая часть одного ядра («кластер») переходит в другое ядро. В нашем примере передаваемая другому ядру часть – это ^4He (α – частица). Реакции передачи проходят с максимальной вероятностью, если скорость продукта реакции (в

нашем случае ^{12}C) равна по модулю и направлению скорости налетающей частицы (в нашем случае – ^{16}O). Мишень ^{54}Fe первоначально находится в состоянии покоя. Ядро ^{58}Ni оказывается в одном из возбуждённых состояний. Найдите энергию возбуждённого состояния (и выразите её в МэВ), если кинетическая энергия налетающего ядра ^{16}O равна 50 МэВ.

Таблица 1

| | | |
|---|---------------------|-----------------|
| 1 | $M(^{16}\text{O})$ | 15,99491 а.е.м. |
| 2 | $M(^{54}\text{Fe})$ | 53,93962 а.е.м. |
| 3 | $M(^{12}\text{C})$ | 12,00000 а.е.м. |
| 4 | $M(^{58}\text{Ni})$ | 57,93535 а.е.м. |

В таблице 1 представлены массы покоя частиц в основном состоянии. 1 а.е.м. = $1,6605 \cdot 10^{-27}$ кг.

б) Образовавшееся ядро ^{58}Ni (из задания а), находящееся в возбуждённом состоянии, переходит в основное состояние, испуская при этом гамма-квант в направлении движения. Рассмотрите реакцию в системе отсчёта, в которой ядро ^{58}Ni покоится, и найдите энергию отдачи $E_{отд}$ (то есть, кинетическую энергию ^{58}Ni после испускания гамма-кванта). Какова энергия гамма-кванта E_γ в этой системе отсчёта? Какова энергия гамма-кванта $E_{дет}$ в лабораторной системе отсчёта (то есть какой будет энергия гамма-кванта, измеренная детектором, который покоится в лабораторной системе отсчёта и расположен в направлении движения ядра ^{58}Ni)?

Об экспериментальном туре, итогах выступления нашей сборной читайте в следующем номере. Там же будут даны краткие решения и ответы к задачам теоретического тура.

Материал к публикации подготовили С.М. Козел, В.П. Слободянин, Д.А. Александров, М.Н. Осин.



Олимпиады

XLI Международная олимпиада школьников по физике (Загреб, Хорватия, 17 – 25 июля 2010 г.)

Теоретический тур. Решения

На следующий день после теоретического тура лидеры команд приступили к обсуждению и переводу на «родные» языки экспериментальных заданий.

Заметим, что задачи для участников олимпиады готовит страна, принимающая олимпиаду. Поэтому обсуждение и редактирование задач идёт, как говорится, «с колёс».

В первой части экспериментального задания ребята должны были исследовать упругие свойства пластмассового кольца. Здесь наша сборная потеряла всего 8% от общего числа баллов. Замечательный результат!

Во второй части задания нужно было исследовать взаимодействие кольцевого и цилиндрического магнитов. При выполнении этой части задания участникам нужно было продемонстрировать как экспериментальное мастерство, так и понимание того, что такое устойчивость системы. В целом ребята справились и с этой частью задания. Однако, как и в прошлые годы, к концу работы ощущалась нехватка времени, и последние пункты задания были выполнены некоторыми членами нашей команды наспех. При выполнении второй части экспериментального задания наши ребята набрали 67% возможных баллов. Если учесть сложность экспериментального задания и его объём, то это совсем неплохой результат. К сожалению, часть баллов, как и на прежних олимпиадах, была потеряна из-за небрежного исполнения графиков, неаккуратной записи результатов измерений и т. д. В нервных условиях олимпиады ребята иногда забывают то, что неоднократно прорабатывали во время сборов.

За всю историю Международных олимпиад (а наша команда принимала участие в 40 олимпиадах) второй раз результаты выполнения экспериментального тура оказались выше результатов теоретического тура.

Сравнительные результаты выступления на XLI Международной олимпиаде стран, все участники которых получили медали, в том числе золотые (в течение многих лет число таких стран не превышает 15), приведены в таблице 1.



Таблица 1

| | Страна | Золото | Серебро | Бронза |
|----|---------------------------|--------|---------|--------|
| 1 | Китай (China) | 5 | | |
| 2 | Таиланд (Thailand) | 5 | | |
| 3 | Тайвань (Taiwan) | 5 | | |
| 4 | Индонезия (Indonesia) | 4 | 1 | |
| 5 | Германия (Germany) | 3 | 1 | 1 |
| 6 | Венгрия (Hungary) | 3 | | 2 |
| 7 | Сингапур (Singapore) | 1 | 4 | |
| 8 | Россия (Russia) | 1 | 3 | 1 |
| 9 | Индия (India) | 1 | 3 | 1 |
| 10 | Вьетнам (Vietnam) | 1 | 3 | 1 |
| 11 | США (USA) | 1 | 2 | 2 |
| 12 | Корея (Republic of Korea) | 1 | 2 | 2 |
| 13 | Англия (United Kingdom) | 1 | 1 | 3 |
| 14 | Гонконг (Hong Kong) | 1 | 1 | 3 |

Из этой таблицы видно, что, как и в прошлые годы, лидирует группа стран из Юго-Восточной Азии. Команды этих стран устойчиво добиваются высоких результатов в Международных олимпиадах не только по физике, но и по другим предметам. Это может означать одно: в этих странах уделяется исключительное внимание образованию и воспитанию молодёжи, в частности, работе с одарёнными детьми, интеллектуальному потенциалу нации.

Каждая задача или задание на Международной физической олимпиаде оценивалась из 10 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

| | Участник команды России | Теория (30 баллов) | Эксперимент (20 баллов) | Сумма баллов (50) | Медаль |
|---|-------------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|---------|
| 1 | Карелина Любовь | 23,0 | 18,7 | 41,7 | золото |
| 2 | Стройнов Евгений | 16,5 | 17,8 | 34,3 | серебро |
| 3 | Алексеев Алексей | 16,0 | 16,7 | 32,7 | серебро |
| 4 | Горностаев Дмитрий | 18,3 | 13,0 | 31,3 | серебро |
| 5 | Анашкин Виктор | 13,1 | 13,0 | 26,1 | бронза |
| | Средний балл | 17,4 | 15,8 | 33,2 | |

Мы уже неоднократно отмечали, что объём заданий олимпиад и объём вычислений, требуемый для решения задач, от года к году возрастал. В этой связи в прошлом году перед закрытием мексиканской олимпиады ряд руководителей команд стран СНГ встретились с президентом Международных физических олимпиад Хансом Иорданом. На встрече было отмечено, что такая тенденция противоречит творческому духу олимпиад. В этом году текстовая часть заданий теоретического тура была заметно сокращена. Однако решения теоретических задач, как и в прошлые годы, требовали громоздких вычислений и расчётов. Именно этот момент, а не физическое содержание заданий, уже который год является для наших ребят непреодолимым препятствием (в отличие от ребят из Китая, Тайваня и ряда других стран). Далее мы приведём решения задач теоретического тура (условия задач см. «Потенциал» №9, 2010).



Решение задачи 1

Решение задания 1.

а) Примем потенциал V Земли равным нулю. Так как металлическая сфера заземлена, то и её потенциал $V = 0$.

б) Рассмотрим произвольную точку B на сфере, как показано на рис. 1.

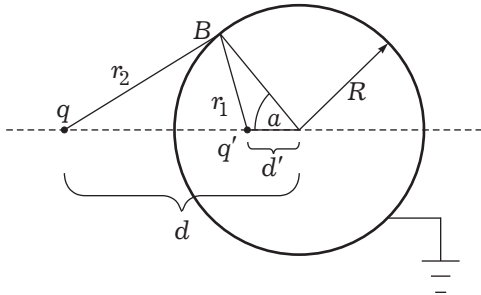


Рис. 1

Расстояние между точкой B и зарядом q' равно

$$r_1 = \sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha}. \quad (1)$$

Расстояние между точкой B и зарядом q равно

$$r_2 = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha}. \quad (2)$$

Потенциал V в точке B равен

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1} \right) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) должно выполняться для любых углов α . Из (1) и (2) с учётом (3) получим

$$d = \left(\frac{q}{q'} \right)^2 d'. \quad (4)$$

Искомые величины d' и q' равны:

$$d' = \frac{R^2}{d}, \quad (5)$$

$$q' = -q \frac{R}{d}. \quad (6)$$

в) Найдём силу, действующую на заряд q :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}. \quad (7)$$

Решение задания 2.

а) Напряжённость электрического поля в точке A равна

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r^2} - \frac{q \frac{R}{d}}{\left(r - \left(d - \frac{R^2}{d} \right) \right)^2} \right] \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (8)$$

б) Для $r \gg d$ в выражении (8) можно использовать аппроксимацию $(1+a)^{-2} = 1-2a$, что приводит к выражению:

$$\vec{E}_A \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \left(1 - \frac{R}{d} \right) \times \left[1 - 2 \frac{R}{r} \left(1 + \frac{R}{d} \right) \right] \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (9)$$

в) В реальности заземлённая металлическая сфера не может полностью экранировать точечный заряд q , находящийся на расстоянии d от сферы. В пределе $d \rightarrow R$ напряжённость электрического поля в точке A

$$\vec{E}_A \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(1 - \frac{R}{d} \right) \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \rightarrow 0.$$

Решение задания 3.

а) Рассмотрим схему, изображённую на рис. 2.

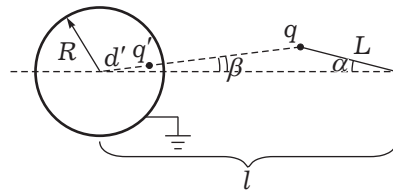


Рис. 2

Расстояние между зарядом q и центром сферы равно

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}. \quad (10)$$

Электрическая сила, действующая на заряд q , равна



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq'}{(d-d')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}. \quad (11)$$

Отсюда получаем

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2LL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2LL \cos \alpha - R^2)^2}. \quad (12)$$

б) Направление вектора электрической силы \vec{F} показано на рис. 3.

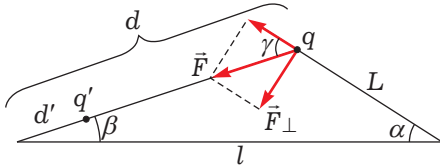


Рис. 3

Углы α и β связаны соотношением

$$L \sin \alpha = d \sin \beta. \quad (13)$$

По теореме о внешнем угле треугольника $\gamma = \alpha + \beta$. Компонента силы, перпендикулярная нити, равна $F \sin \gamma$, или

$$F_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2LL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2LL \cos \alpha - R^2)^2} \times \sin(\alpha + \beta). \quad (14)$$

в) Уравнение движения математического маятника

$$mL\ddot{\alpha} = -F_{\perp}. \quad (15)$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, то угол α мал. При этом $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx 1 - x^2/2$. Поэтому для малых колебаний маятника мы имеем

$$\beta \approx \alpha L / (l - L) \text{ и } \gamma \approx \alpha l / (l - L).$$

Объединяя эти выражения с (10), получаем:

$$mL\ddot{\alpha} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} \left(1 + \frac{L}{d}\right) \alpha = 0, \quad (16)$$

где $d = l - L$, откуда

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{q}{d^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mL} \left(1 + \frac{L}{d}\right)} = \\ &= \frac{q}{(l - L)^2 - R^2} \sqrt{\frac{Rl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mL}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение задания 4.

Сначала приведём решение, основанное на определении электростатической энергии системы зарядов.

Полная энергия системы может быть разделена на электростатическую энергию взаимодействия внешнего заряда с зарядами, индуцированными на сфере $W_{эл1}$, и энергию взаимодействия зарядов на сфере $W_{эл2}$, то есть

$$W_{эл} = W_{эл1} + W_{эл2}. \quad (18)$$



Награды получены

а) Взаимная электростатическая энергия заряда q и зарядов сферы должна равняться взаимной энергии зарядов q и q' в соответствии с понятием заряда-изображения:

$$\begin{aligned} W_{эл1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq'}{(d-d')} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R}{(d^2 - R^2)} \end{aligned} \quad (19)$$

Фактически величина энергии взаимодействия $W_{эл1}$ получается непосредственно из определения заряда-изображения.

в) Мы можем получить полную энергию системы, вычисляя работу,



необходимую для перемещения заряда q из бесконечности на расстояние d от центра сферы:

$$W_{эл1}(d) = -\int_{\infty}^d F(x)dx = \int_d^{\infty} F(x)dx = -\int_d^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R}{(d^2 - R^2)}. \quad (20)$$

б) Энергия взаимодействия зарядов, индуцированных на поверхности сферы, может быть получена из (19) и (20):

$$W_{эл1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 R}{(d^2 - R^2)}. \quad (21)$$

Решение задачи 2

Решение задания 1.

а) Обозначим через $p(z)$ давление воздуха на высоте z ; тогда $p(0)$ – атмосферное давление в топке и $p(h) = p(0) - \rho_{воз}gh$ – давление на вершине трубы. В трубе выполняется уравнение Бернулли, в частности, непосредственно на входе в трубу (в зоне горения, где скорость пренебрежимо мала, а давление атмосферное) и на выходе из трубы. Применение уравнения Бернулли в этих двух точках даёт:

$$\frac{1}{2} \rho_{дым} v^2(h) + \rho_{дым}gh + p(h) \approx p(0), \quad (1)$$

где $\rho_{дым}$ – плотность дыма в трубе. Отсюда получаем

$$v(h) = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{воз}}{\rho_{дым}} - 1 \right)}. \quad (2)$$

Труба будет эффективной, если все продукты горения выводятся в атмосферу, т. е.

$$v(h) \geq \frac{B}{S}, \quad (3)$$

откуда получаем

$$h \geq \frac{B^2}{S^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{\frac{\rho_{воз}}{\rho_{дым}} - 1}. \quad (4)$$

Если предположить, что дым в топке является идеальным газом (при атмосферном давлении $p(0)$ и температуре $T_1 = T_{дым}$) и что воз-

дух тоже является идеальным газом, получим:

$$\frac{\rho_{воз}}{\rho_{дым}} = \frac{T_{дым}}{T_{воз}}, \quad (5)$$

$$h \geq \frac{B^2}{S^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{T_{воз}}{T_{дым} - T_{воз}} = \frac{F^2}{A^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{T_{воз}}{\Delta T}. \quad (6)$$

(Для ясности мы используем обозначения $T_{воз} = T_{атм}$ и $T_1 = T_{дым}$.)

$$\text{б) } \frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\frac{T(30)}{T_{дым} - T(30)}}{\frac{T(-30)}{T_{дым} - T(-30)}}; \quad (7)$$

$$h(30) = 145 \text{ м.}$$

в) Скорость является постоянной:

$$v = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{воз}}{\rho_{дым}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left(\frac{T_{дым}}{T_{воз}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{воз}}}. \quad (8)$$

Это следует из уравнения неразрывности $Sv = \text{const}$ ($\rho_{дым} = \text{const}$).

Скорость изменяется скачком от примерно нулевого значения до постоянной величины, когда газ входит в трубу из топки.

з) На высоте z из уравнения Бернулли следует

$$p_{дым}(z) = p(0) - (\rho_{воз} - \rho_{дым})gh - \rho_{дым}gz. \quad (9)$$

**Решение задания 2.**

а) Кинетическая энергия горячего воздуха, выделяющаяся за время Δt :

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}(Sv\Delta t\rho_{\text{гор}}) = Sv\Delta t\rho_{\text{гор}}gh\frac{\Delta T}{T_{\text{атм}}}, \quad (10)$$

где индекс «гор» обозначает горячий воздух, нагретый солнцем. Если мы обозначим массу воздуха, выходящего из трубы за единицу времени как $m_0 = Sv\rho_{\text{гор}}$, то мощность, соответствующая приведённой выше кинетической энергии, составит

$$P_{\text{кин}} = m_0gh\frac{\Delta T}{T_{\text{атм}}}. \quad (11)$$

Это максимальная мощность, которая может быть получена из кинетической энергии газового потока. Солнечная мощность, используемая для нагревания воздуха, равна

$$P_{\text{сол}} = GS_{\text{к}} = m_0c\Delta T, \quad (12)$$

КПД равен

$$\eta = \frac{P_{\text{кин}}}{P_{\text{сол}}} = \frac{gh}{cT_{\text{атм}}}. \quad (13)$$

б) Зависимость линейная.

Решение задания 3.

а) КПД равен

$$\eta = \frac{P_{\text{кин}}}{P_{\text{сол}}} = 0,0064 = 0,64\%. \quad (14)$$

б) Мощность равна

$$P = GS\eta = G(D/2)^2\pi\eta = 45 \text{ кВт}. \quad (15)$$

в) Если у нас 8 солнечных часов в день, то получится 360 кВт · час.

Решение задания 4.

Результат может быть получен, если представить массовый расход воздуха m_0 как

$$m_0 = Sv\rho_{\text{гор}} = S\sqrt{2gh\frac{\Delta T}{T_{\text{воз}}}}\rho_{\text{гор}}, \quad (16)$$

$$m_0 = \frac{GS_{\text{к}}}{c\Delta T}, \quad (17)$$

что даёт при $G = 150 \text{ Вт/м}^2$

$$\Delta T = \left(\frac{G^2 S_{\text{к}}^2 T_{\text{атм}}}{S^2 c^2 \rho_{\text{гор}}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9,1 \text{ К}. \quad (18)$$

Отсюда получаем

$$m_0 = 760 \text{ кг/с}. \quad (19)$$

Решение задачи 3**Решение задания 1.**

а) В простой кубической решётке в каждой из 8 вершин данного куба расположен один нуклон, который принадлежит также восьми соседним кубам. Поэтому на один куб приходится один нуклон. Длина ребра куба $a = 2r_N$. Объём одного нуклона

$$V_N = \frac{\pi}{6}a^3. \quad (1)$$

Отсюда находим фактор упаковки:

$$f = \frac{V_N}{a^3}. \quad (2)$$

б) Средняя плотность нуклона

$$\rho_m = f\frac{m_N}{a^3} = 3,4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3. \quad (3)$$

В упрощённой модели ядра число протонов равно числу нейтронов, поэтому средняя плотность заряда:

$$\rho_q = \frac{f}{2} \frac{e}{V_N} = 1,6 \cdot 10^{25} \text{ Кл/м}^3. \quad (4)$$

Пусть число нуклонов в ядре равно A . Тогда полный объём, занятый нуклонами, есть:

$$V = \frac{AV_N}{f}. \quad (5)$$

Это приводит к следующему соотношению между радиусом ядра и числом нуклонов:

$$R = r_N \left(\frac{A}{f} \right)^{1/3} \approx 1,06 \cdot A^{1/3} \text{ фм}. \quad (6)$$

Константу $1,06 \text{ фм} = 1,06 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ будем обозначать r_0 .

Решение задания 2.

а) Энергия связи на один поверхностный нуклон приблизительно



равна $0,5a_V$, где $a_V = 15,8$ МэВ – удельная энергия связи на один внутренний нуклон.

б) Оценим сначала число поверхностных нуклонов. Объем поверхностного слоя

$$V_{\text{пов}} = \frac{4}{3}\pi [R^3 - (R - 2r_N)^3]. \quad (7)$$

Число поверхностных нуклонов в этом слое

$$A_{\text{пов}} = f \frac{V_{\text{пов}}}{V_N} \approx$$

$$\approx 4,84A^{2/3} - 7,80A^{1/3} + 4,19. \quad (8)$$

Полная энергия связи нуклонов

$$E_b = (A - A_{\text{пов}})a_V + A_{\text{пов}} \frac{a_V}{2}. \quad (9)$$

Решение задания 3.

а) Протон сам на себя кулоновскими силами не действует. Поэтому, с учётом поправки $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$, электростатическая энергия однородно по объёму заряженного шара равна

$$U_c = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q_0^2}{R}. \quad (10)$$

б) В формуле (10) следует заменить R на $r_N \cdot f^{-1/3} A^{1/3}$, а также Z на $A/2$.

Кулоновское отталкивание протонов уменьшает энергию связи, поэтому перед первым (главным) членом в окончательном выражении стоит минус.

$$E_b = \left(A - 3f^{1/3} A^{2/3} + 6f^{2/3} A^{1/3} - 4f \right) a_V - \frac{3f^{1/3} e^2}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2} \right). \quad (11)$$

Решение задания 4.

а) Кинетическая энергия продуктов деления тяжёлого ядра

$$E_{\text{кин}} = 2E_b \left(\frac{A}{2} \right) - E_b(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{A}{4} \right)^2 \frac{e^2}{d}. \quad (12)$$

б) Пусть $d = 2R(A/2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} A = 100, & \quad E_{\text{кин}} = -33,95 \text{ МэВ}; \\ A = 150, & \quad E_{\text{кин}} = -30,93 \text{ МэВ}; \\ A = 200, & \quad E_{\text{кин}} = -14,10 \text{ МэВ}; \\ A = 250, & \quad E_{\text{кин}} = +5,06 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценочно: $A_{\text{мин}} = 225$. Точный расчёт даёт $A_{\text{мин}} = 227$.

Решение задания 5.

а) Энергия возбуждения атома ^{58}Ni ($E_{\text{возб}}$)_{Ni} = 10,866 МэВ. (14)

б) Для процесса испускания γ -кванта неподвижным ядром законы сохранения энергии и импульса дают

$$E_{\text{отд}} = \frac{E_\gamma^2}{2m_{\text{Ni}}c^2}. \quad (15)$$

Аккуратные вычисления показывают, что практически вся энергия возбуждения атома ^{58}Ni уносится γ -квантом:

$$E_\gamma = 10,86 \text{ МэВ}. \quad (16)$$

Так как энергия γ -кванта (фотона) пропорциональна его частоте, мы получим аналогичную формулу для энергии, измеренной детектором:

$$E_{\text{дет}} = E_\gamma \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (17)$$

Здесь $\beta = \frac{v}{c}$. В итоге получим

$$E_{\text{дет}} = 10,927 \text{ МэВ}. \quad (18)$$

Материал к публикации подготовили С.М. Козел, В.П. Слободянин.