

## 1. Проблема трех тел и LISA

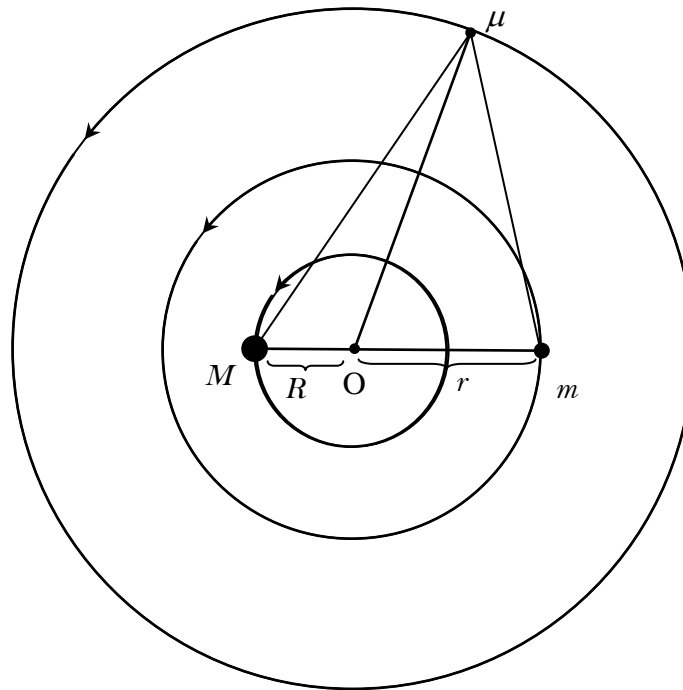


Рис. 1. Концентрические орбиты трех тел в одной плоскости.

**1.1** Два тела с массами  $M$  и  $m$  движутся по круговым орбитам с радиусами  $R$  и  $r$ , соответственно, вокруг общего центра масс. Выразите угловую скорость вращения  $\omega_0$  отрезка, соединяющего тела  $M$  и  $m$ , через  $R, r, M, m$  и гравитационную постоянную  $G$ .

[1.5 балла]

**1.2** Третье тело с пренебрежимо малой массой  $\mu$  вращается в той же плоскости по круговой орбите вокруг того же центра масс так, что остается неподвижным относительно тел  $M$  и  $m$  (рис. 1.). Считайте, что третье тело **не** лежит на прямой, соединяющей тела  $M$  и  $m$ . Выразите следующие параметры через  $R$  и  $r$ :

[3.5 балла]

1.2.1 расстояние от тела  $m$  до  $M$ .

1.2.2 расстояние от тела  $m$  до  $\mu$ .

1.2.3 расстояние от тела  $m$  до центра масс системы.

**1.3** Рассмотрите случай  $M = m$ . Тело  $m$  выводят из положения равновесия в радиальном направлении (вдоль радиуса  $O m$ ). Выразите циклическую частоту радиальных

колебаний тела через  $\omega_0$ . Считайте, что момент импульса тела  $m$  не изменяется. [3.2 балла]

Лазерная интерферометрическая космическая антенна LISA (The Laser Interferometry Space Antenna) представляет собой три одинаковых космических аппарата и предназначена для детектирования низкочастотных гравитационных волн. Каждый из аппаратов располагается в вершине равностороннего треугольника, как показано на рис.2. и рис. 3. Длина сторон треугольника (плеч интерферометра) – около 5,0 млн. км. Система LISA находится на земной орбите так, что угол Земля-Солнце-LISA составляет  $20^\circ$ . Каждый аппарат движется по слегка наклоненной орбите вокруг Солнца. Фактически, в системе отсчета, связанной с LISA, аппараты вращаются вокруг центра антенны с периодом в 1 год.

Аппараты непрерывно посылают и принимают лазерные сигналы друг другу. Таким образом они детектируют гравитационные волны, измеряя небольшие изменения длин плеч интерференционным методом. Столкновение массивных объектов, таких как черные дыры, в соседних галактиках является источником гравитационных волн.

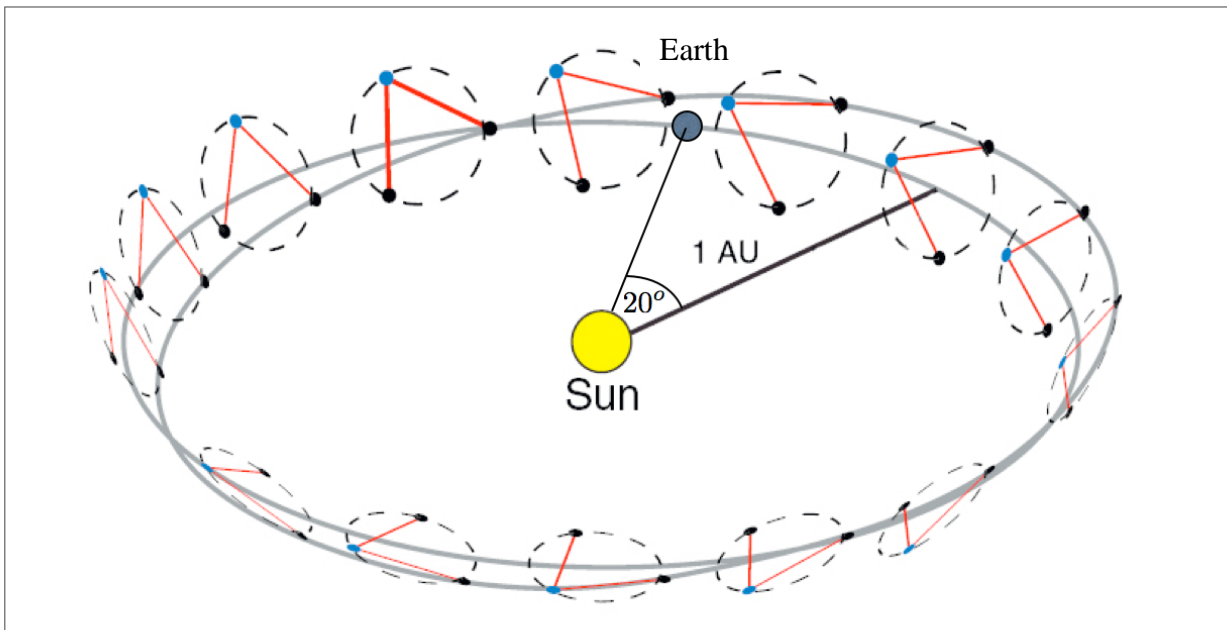


Рис. 2. Изображение орбиты LISA. Три аппарата вращаются с периодом в 1 год. Угол Земля-Солнце-LISA составляет  $20^\circ$  (Earth – Земля, Sun – Солнце). (Иллюстрация из D.A. Shaddock, “An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna”, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009, **26**, pp.128-132.).

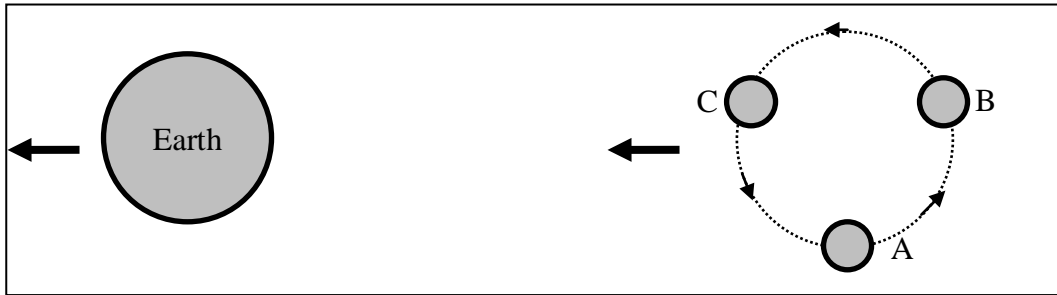


Рис. 3. Увеличенное изображение трех аппаратов LISA, двигающихся вслед за Землей. А, В и С – три аппарата, находящиеся в вершинах равностороннего треугольника (Earth – Земля).

- 1.4 Определите вектор относительной скорости движения одного из аппаратов относительно другого в плоскости LISA. [1.8 балла]

## 2. Заряженный мыльный пузырь

Сферический мыльный пузырь радиусом  $R_0$ , наполненный воздухом с плотностью  $\rho_i$  при температуре  $T_i$ , находится в воздухе с плотностью  $\rho_a$  при температуре  $T_a$  и атмосферном давлении  $P_a$ . Мыльная пленка характеризуется поверхностным натяжением  $\gamma$ , плотностью  $\rho_s$  и толщиной  $t$ . Поверхностное натяжение и масса мыльной пленки не изменяются с температурой. Считается, что  $R_0 \gg t$ .

Увеличение энергии  $dE$ , требуемое для увеличения площади поверхности границы между мыльной пленкой и воздухом на величину  $dA$ , дается соотношением  $dE/dA = \gamma$ , где  $\gamma$  – поверхностное натяжение пленки.

- 2.1. Запишите отношение  $\rho_i T_i / \rho_a T_a$  через  $\gamma$ ,  $P_a$  и  $R_0$ . [1,7 балл]
- 2.2. Найдите численное значение  $(\rho_i T_i / \rho_a T_a) - 1$ , используя значения  $\gamma = 0,0250$  Н/м,  $R_0 = 1,00$  см и  $P_a = 1,013 \times 10^5$  Н/м<sup>2</sup>. [0,4 балла]
- 2.3. Воздух внутри пузыря первоначально теплее атмосферного. Найдите значение минимальной температуры  $T_i$ , необходимой для того, чтобы пузырь мог парить в воздухе, не падая. Используйте значения  $T_a = 300$  К,  $\rho_s = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_a = 1,30$  кг/м<sup>3</sup>,  $t = 100$  нм и  $g = 9,80$  м/с<sup>2</sup>. [2,0 балла]

Через некоторое время после образования мыльного пузыря установится тепловое равновесие между ним и окружающим воздухом. Поэтому в неподвижном воздухе мыльный пузырь опустится на землю.

- 2.4. Найдите минимальную скорость  $u$  поднимающегося вверх воздуха, при которой мыльный пузырь, находящийся в тепловом равновесии с воздухом, не опускается. Выразите ответ через  $\rho_s$ ,  $R_0$ ,  $g$ ,  $t$  и коэффициент вязкости воздуха  $\eta$ . Сила сопротивления определяется законом Стокса:  $F = 6\pi\eta R_0 u$ . [1,6 балла]
- 2.5. Рассчитайте численно величину  $u$ , используя значение  $\eta = 1,8 \times 10^{-5}$  кг/(м·с). [0,4 балла]

Проведенные расчеты показывают, что слагаемые, включающие поверхностное натяжение  $\gamma$ , не оказывают существенного влияния на результат. Поэтому во всех последующих пунктах поверхностным натяжением можно пренебречь.

- 2.6. Предположим теперь, что пузырь заряжен равномерно с общим зарядом  $q$ . Выведите уравнение для определения радиуса  $R_1$  пузыря после его зарядки через  $R_0$ ,  $P_a$ ,  $q$  и электрическую постоянную  $\epsilon_0$ . [2,0 балла]
- 2.7. Предположим, что заряд пузыря  $q$  не очень велик ( $q^2 / (\epsilon_0 R_0^4) \ll P_a$ ), так что зарядка пузыря увеличивает его радиус на малую величину  $\Delta R$  ( $\Delta R = R_1 - R_0$ ). Найдите  $\Delta R$ .

Известно, что  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  при  $x \ll 1$ . [0,7 балла]

- 2.8. Найдите такой заряд  $q$ , выраженный через  $t$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_s$ ,  $\epsilon_0$ ,  $R_0$ ,  $P_a$ , при котором пузырь будет неподвижно висеть в воздухе. Вычислите величину этого заряда. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м. [1,2 балл]

### 3. В честь столетия модели атомного ядра Резерфорда.

#### Рассеяние иона на нейтральном атоме.

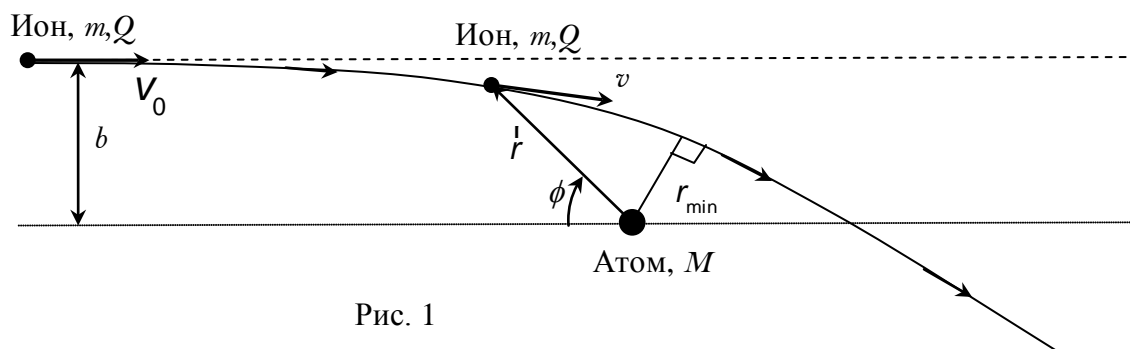
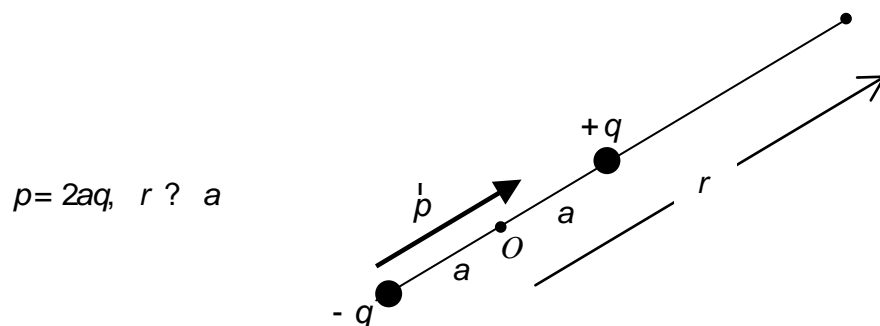


Рис. 1

Ион массой  $m$ , зарядом  $Q$ , движется с начальной скоростью  $v_0$  из бесконечности к окрестности нейтрального атома массой  $M \gg m$  и электрической поляризуемостью  $a$ . Прицельный параметр равен  $b$ , как показано на рис. 1.

Атом мгновенно поляризуется электрическим полем ( $\vec{E}$ ) приближающегося иона. В результате у него появляется электрический дипольный момент  $\vec{p} = a\vec{E}$ . Релятивистские эффекты не учитывайте.

3.1 Рассчитайте напряжённость  $\vec{E}_p$  электрического поля на расстоянии  $r$  на оси диполя с дипольным моментом  $\vec{p}$ , расположенного в начале координат (точка O). [1.2 балла]



$p = 2aq, r \gg a$

Рис. 2

**3.2** Найдите выражение для силы  $\vec{f}$ , действующей на ион со стороны поляризованного им атома. Покажите, что эта сила есть сила притяжения независимо от знака заряда иона.

[3.0 балла]

**3.3** Найдите электрическую потенциальную энергию взаимодействия атома и иона, выразив её через  $a, Q$  и  $r$ .

[0.9 балла]

**3.4** Получите выражение для минимального расстояния  $r_{\min}$  между ионом и атомом (см. рис. 1).

[2.4 балла]

**3.5** Если прицельный параметр  $b$  меньше критического значения  $b_0$ , то ион упадёт по спиральной траектории на атом. В этом случае ион окажется нейтрализованным, а атом — заряженным. Этот процесс известен как «перезарядка». Чему равна площадь сечения  $A = \rho b_0^2$  этой «перезарядки» атома, как это видно «с точки зрения» налетающего иона?

[2.5 балла]