



45th International Physics Olympiad
Astana, Kazakhstan
Theoretical Competition, Tuesday, 15 July 2014

Список фундаментальных констант

Скорость света в вакууме	$c = 299792458 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Ускорение свободного падения	$g = 9.81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$
Число Авогадро	$N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8.31 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Элементарный заряд	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса электрона	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Планка	$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$

Полезные математические формулы

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2, \text{ где } |x| \ll 1 \text{ и } \alpha \text{ постоянная}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3}, \text{ где } |x| \ll 1$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \text{ где } |x| \ll 1$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, \text{ где } C \text{ постоянная интегрирования}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C, \text{ где } C \text{ постоянная интегрирования}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$u'_t(x(t)) = u'_x(x(t))x'_t(t)$$

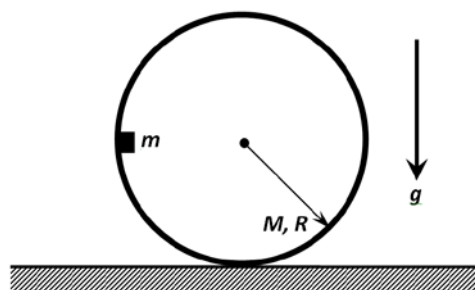
$$(u(x)v(x))' = u(x)'v(x) + u(x)v(x)'$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2}$$

Задача 1 (9 баллов)

Эта задача состоит из трёх независимых частей

Часть А (3 балла)



Небольшое тело массой m осторожно положили на внутреннюю поверхность полого тонкого цилиндра массой M и радиуса R . В начальный момент времени цилиндр покоится на горизонтальной поверхности стола, а тело находится на высоте R над поверхностью стола. Найдите силу F взаимодействия между телом и цилиндром в тот момент, когда тело находится в нижней точке своей траектории. Трение между телом и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, а цилиндр сам движется по поверхности стола без проскальзывания. Ускорение свободного падения равно g .

Часть В (3 балла)

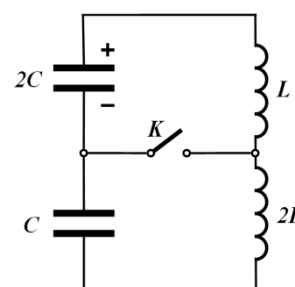
В вакууме находится мыльный пузырь радиуса $r = 5.00$ см и толщиной стенок $h = 10.0$ мкм, внутри которого содержится двухатомный идеальный газ. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и плотность $\rho = 1.10 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

- 1) Выведите формулу и рассчитайте молярную теплоемкость C газа в мыльном пузыре. Считайте, что газ нагревается так медленно, что пузырь всё время находится в состоянии механического равновесия;
- 2) Найдите и рассчитайте циклическую частоту ω радиальных колебаний пузыря. Считайте, что теплоемкость мыльной пленки много больше теплоемкости газа в пузыре и термодинамическое равновесие внутри пузыря устанавливается гораздо быстрее, чем период колебаний.
Подсказка: Лаплас показал, что разница давлений внутри и снаружи искривленной поверхности между жидкостью и газом, вызванная поверхностным натяжением, равна $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Часть С (3 балла)

В начальный момент в схеме, изображенной на рисунке, ключ K разомкнут, конденсатор емкостью $2C$ имеет заряд q_0 , конденсатор емкостью C не заряжен, ток в катушках с индуктивностями L и $2L$ отсутствует.

Конденсатор начинает разряжаться, и в момент времени, когда сила тока в катушках достигает максимального значения, ключ K замыкают. Найдите максимальную силу тока I_{max} , протекающего в последующем через ключ K .



Задача 2. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса (11 баллов)

В модели идеального газа, описываемого уравнением Менделеева—Клапейрона, не учитываются два важных физических эффекта. Во-первых, молекулы реального газа имеют конечный размер, во-вторых — они взаимодействуют друг с другом. Во всех частях задачи рассматривается *один моль водяного пара*.

Часть А. Уравнение состояния неидеального газа (2 балла)

С учетом конечного размера молекул уравнение состояния газа примет вид

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

где P, V, T — давление газа, его объем и температура, соответственно, R — универсальная газовая постоянная, а b — некоторая постоянная.

A1 Оцените параметр b и выразите его через характерный диаметр молекулы воды d . (0,3 балла)

С учетом сил межмолекулярного притяжения Ван-дер-Ваальс предложил следующее уравнение, которое описывает жидкое и газообразное состояние вещества:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (2)$$

где a — ещё одна постоянная.

При температурах T ниже некоторой критической температуры T_c изотерма уравнения (2) представляет собой немонотонную кривую 1, изображенную на рис. 1, которая называется изотермой Ван-дер-Ваальса. На этом же рисунке построена кривая 2 — изотерма идеального газа при той же температуре. Реальная изотерма отличается от изотермы Ван-дер-Ваальса прямым участком AB с постоянным давлением P_{LG} , расположенным по оси объемов между V_L и V_G , на котором реализуется равновесие жидкости (обозначенной индексом L) и газа (обозначенного индексом G). Используя второе начало термодинамики Дж. Максвелл показал, что давление P_{LG} должно быть выбрано таким образом, чтобы показанные на рисунке 1 площади I и II были одинаковы.

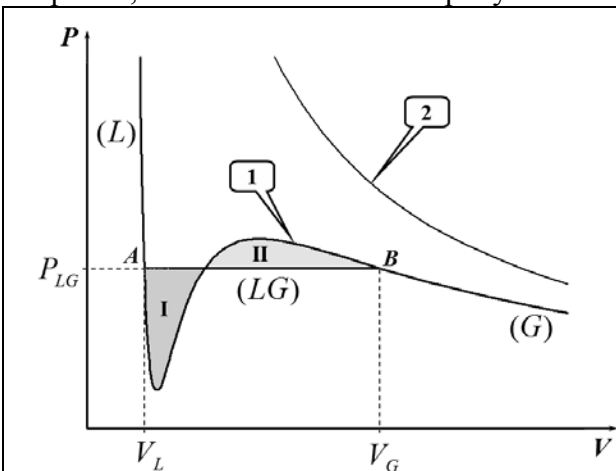


Рис. 1. Изотерма Ван-дер-Ваальса для газа/жидкости. (кривая 1) и изотерма идеального газа (кривая 2).

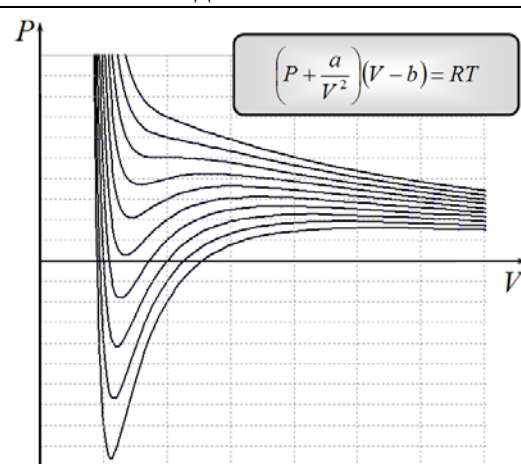


Рис. 2. Ряд изотерм Ван-дер-Ваальса.

С увеличением температуры длина прямолинейного участка AB изотермы уменьшается и при некоторой температуре T_c и давлении $P_{LG} = P_c$ обращается в нуль. Параметры P_c и T_c называются критическими и могут быть измерены экспериментально с большой точностью.

A2 Выразите постоянные Ван-дер-Ваальса a и b через T_c и P_c . (1,3 балла)

A3 Для воды $T_c = 647$ К и $P_c = 2.2 \cdot 10^7$ Па. Вычислите a_w и b_w для воды. (0,2 балла)

A4 Оцените диаметр молекулы воды d_w . (0,2 балла)

Часть В. Свойства газа и жидкости (6 баллов)

В данной части задачи рассматриваются свойства воды в газообразном и жидком состояниях, находящейся при $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $P_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5\text{ Па}$. Молярная масса воды $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2}\text{ кг/моль}$.

Газообразное состояние

Можно считать, что при описании свойств воды в газообразном состоянии выполняется условие $V_G \gg b$.

В1	Получите формулу для объема пара V_G при заданных условиях и выразите его через R, T, P_0 и a . (0.8 балла)
-----------	--

Этот же объем V_{G0} можно приближенно рассчитать с помощью уравнения состояния идеального газа.

В2	Рассчитайте, на сколько процентов уменьшается объем газа вследствие межмолекулярных взаимодействий: $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$. (0.3 балла)
-----------	--

При уменьшении объема пара ниже значения V_G начинается его конденсация. Однако тщательно очищенный пар может оставаться в механически метастабильном состоянии (переохлажденный пар) до тех пор, пока его объем не достигнет некоторого значения V_{Gmin} .

Условие механической стабильности переохлажденного газа при постоянной температуре записывается как $\frac{dP}{dV} < 0$.

В3	Найдите и рассчитайте, во сколько раз можно уменьшить объем пара, чтобы он оставался в газообразном состоянии. Другими словами, найдите V_G/V_{Gmin} . (0.7 балла)
-----------	---

Жидкое состояние

Можно считать, что при ван-дер-ваальсовском описании свойств воды в жидком состоянии выполняется неравенство: $P \ll a/V^2$.

В4	Выразите объем воды V_L в жидком состоянии через a, b, R и T . (1.0 балл)
-----------	--

Полагая, что $bRT \ll a$, рассчитайте следующие характеристики воды (не удивляйтесь, если некоторые данные не совпадут с известными вам табличными значениями).

В5	Выразите плотность воды ρ_L через μ, a, b, R и рассчитайте ее. (0.3 балла)
В6	Выразите объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ через a, b, R и рассчитайте его. (0.6 балла)
В7	Выразите удельную теплоту парообразования воды L через μ, a, b, R и рассчитайте ее. (1.1 балла)
В8	Рассмотрите мономолекулярный слой воды и оцените коэффициент σ её поверхностного натяжения. (1.2 балла)

Часть С. Система жидкость-пар (3 балла)

Из правила Максвелла (равенства площадей) и уравнения Ван-дер-Ваальса при использованных в части **В** приближениях следует, что зависимость давления насыщенного пара p_{LG} от температуры T имеет вид

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T} \quad (3)$$

где A, B — постоянные величины, которые могут быть выражены через a, b следующим образом:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1; B = -\frac{a}{bR}$$

Уильям Томсон показал, что давление насыщенного водяного пара над поверхностью жидкости зависит от кривизны этой поверхности. Рассмотрим жидкость, которая не смачивает материал капилляра (угол смачивания равен 180°). При погружении капилляра в жидкость, она опускается на некоторую глубину вследствие поверхностного натяжения (см. рис. 3).

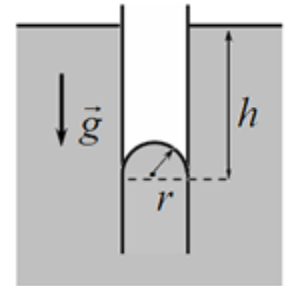


Рис. 3. Капилляр, погруженный в не смачивающую его жидкость, в атмосфере насыщенного пара.

С1	Найдите малое изменение давления Δp_T насыщенных паров над искривленной поверхностью жидкости и выразите его через плотность пара ρ_s , плотность жидкости ρ_L , коэффициент поверхностного натяжения σ и радиус кривизны поверхности r . (1.3 балла)
-----------	--

Метастабильные состояния (рассмотренные в части **В3**) широко используются в реальных физических установках, таких, как камера Вильсона, пузырьковая камера для регистрации элементарных частиц, а также встречаются в природных явлениях, например, при образовании утренней росы. Переохлажденный пар стремится сконденсироваться, образуя капельки жидкости. Очень маленькие капли быстро испаряются, а достаточно большие могут расти.

С2	Предположим, что вечером при температуре $t_e = 20^\circ\text{C}$ пар был насыщенным, а утром температура окружающей среды упала на небольшую величину $\Delta t = 5.0^\circ\text{C}$. Считая давление пара неизменным, оцените минимальный радиус капель, которые могут расти. Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2}$ Н/м. (1.7 балла)
-----------	--

Задача 3. Простейшая модель газового разряда (10 баллов)

Процесс протекания электрического тока через газ называется газовым разрядом. Существует много типов газовых разрядов: тлеющий разряд (используется в осветительных лампах), дуговой разряд (применяется для сварки), искровой разряд (возникает между облаками и землей в виде молнии).

Часть А. Несамостоятельный газовый разряд (4.8 балла)

В этой части задачи будем изучать несамостоятельный газовый разряд, для поддержания которого необходимо постоянное присутствие внешнего ионизатора, т.е. устройства, которое в единице объема газа в единицу времени однородно по всему объему создает Z_{ext} пар однократно ионизированных атомов и электронов.

При включении внешнего ионизатора число пар электронов и ионов начинает расти. Неограниченному увеличению концентрации электронов и ионов в газе препятствует процесс их рекомбинации, при котором свободный электрон соединяется с ионом и образуется нейтральный атом. Число рекомбинаций в единице объема в единицу времени Z_{rec} дается формулой

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

где r — постоянная, называемая коэффициентом рекомбинации, n_e и n_i — концентрации электронов и ионов соответственно.

Пусть в момент $t = 0$ включается внешний ионизатор. Начальная концентрация электронов и ионов в газе равна нулю. Тогда зависимость концентрации электронов $n_e(t)$ от времени t выражается формулой

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

где n_0, a, b — некоторые постоянные, а $\tanh x$ — гиперболический тангенс.

A1	Найдите n_0, a, b и выразите ответ через Z_{ext} и r . (1.8 балла)
-----------	---

Предположим, что имеется два внешних ионизатора. Известно, что при включении одного из них в газе устанавливается концентрация электронов, равная $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. При включении другого внешнего ионизатора в газе устанавливается концентрация электронов, равная $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

A2	Найдите установившуюся концентрацию электронов n_e , если два ионизатора будут работать одновременно. (0.6 балла)
-----------	---

Внимание! В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор действует в течение достаточно длительного промежутка времени, так что все процессы являются стационарными и не зависят от времени. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.

Пусть газ находится в трубке между двумя параллельными проводящими пластинами площади S , расположенными на расстоянии $L \ll \sqrt{S}$ друг от друга. Приложим к пластинам напряжение U , при этом между ними образуется электрическое поле. Считайте, что концентрация обоих носителей в трубке практически везде одинакова.

Пусть в электрическом поле электроны (обозначенные индексом e) и ионы (обозначенные индексом i) приобретают одинаковую скорость упорядоченного движения, равную

$$v = \beta E,$$

где E — напряженность электрического поля, β — так называемая подвижность.

A3	Выразите силу тока в трубке I через $U, \beta, L, S, Z_{\text{ext}}, r, e$ где e — элементарный заряд. (1.7 балла)
-----------	--

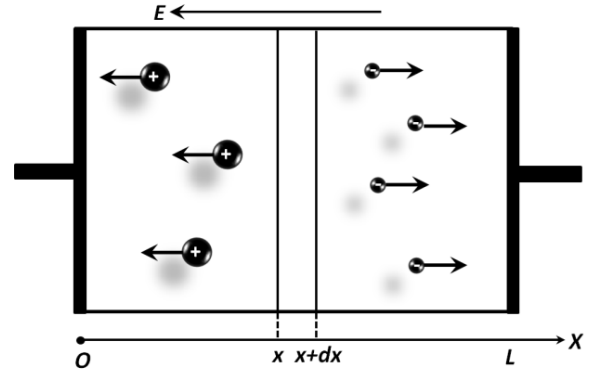
A4	Найдите удельное сопротивление газа ρ_{gas} при малых значениях приложенного напряжения и выразите его через $\beta, L, Z_{\text{ext}}, r, e$. (0.7 балла)
-----------	---

Часть В. Самостоятельный газовый разряд (5.2 балла)

Изучим процесс зажигания самостоятельного газового разряда, при котором ток в трубке становится самоподдерживающимся.

Внимание! В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор продолжает действовать с тем же Z_{ext} , электрическое поле всюду однородно, а рекомбинацией можно полностью пренебречь. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.

Для самостоятельного газового разряда важны два процесса, не рассмотренных выше. Первый процесс — вторичная электронная эмиссия, а второй — образование электронной лавины. Вторичная электронная эмиссия возникает в тот момент, когда ионы ударяют по отрицательному электроду, называемому катодом, и выбивают из него электроны, которые затем движутся к положительному электроду, называемому анодом. Отношение числа выбитых в единицу времени электронов \dot{N}_e к числу ионов \dot{N}_i , попадающих на катод в единицу времени, называется коэффициентом вторичной электронной эмиссии $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$.



Образование электронной лавины происходит следующим образом. Электрическое поле ускоряет свободные электроны, которые ионизируют атомы при столкновении с ними. В результате число свободных электронов растёт при их движении к аноду. Этот процесс характеризуется коэффициентом Таунсенда α , который описывает увеличение числа электронов dN_e на единицу длины пути dl , то есть

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

Полный ток I в любом сечении трубки с газом складывается из ионного $I_i(x)$ и электронного $I_e(x)$, которые в стационарном режиме зависят от координаты x , показанной на рисунке. Изменение электронного тока $I_e(x)$ вдоль оси описывается формулой

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

где A_1, A_2, C_1 — некоторые постоянные.

В1 Найдите A_1, A_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$. (2 балла)

Изменение ионного тока $I_i(x)$ вдоль оси x описывается формулой

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

где B_1, B_2, C_2 — некоторые постоянные.

В2	Найдите B_1, B_2 и выразите их через $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$. (0.6 балла)
В3	Запишите условие для тока $I_i(x)$ в точке $x = L$. (0.3 балла)
В4	Запишите условие для токов $I_i(x)$ и $I_e(x)$ в точке $x = 0$. (0.6 балла)
В5	Найдите полный ток I и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. Считайте, что полный ток остается конечной величиной (1.2 балла)

Пусть коэффициент Таунсенда α постоянен. При длине разрядного промежутка, большей некоторого критического значения $L > L_{\text{cr}}$, внешний ионизатор может быть отключен, т.е. разряд становится самостоятельным.

В6 Найдите L_{cr} и выразите его через $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$. (0.5 балла)