

Теоретический тур - задача № 1

Измерение массы в невесомости

На космическом корабле, совершающем орбитальное движение вокруг Земли, реализуется состояние невесомости. Таким образом, невозможно обычными способом измерить вес и определить массу космонавта. Skylab 2 и некоторые другие космические корабли снабжены устройством для измерения массы, которое состоит из кресла, прикрепленного к одному из концов пружины. Другой конец пружины прикреплен к фиксированной точке космического корабля. Ось этой пружины проходит через центр масс корабля. Коэффициент упругости (жесткость) пружины равна $k = 605.6 \text{ Н/м}$.

1. Когда корабль стоит неподвижно на стартовой площадке, кресло (без человека) колеблется с периодом $T_0 = 1.28195 \text{ с}$.

Вычислите массу кресла m_0 [2 балла]

2. Когда корабль вращается по орбите вокруг Земли космонавт пристегивается ремнями к креслу и измеряет период T' колебаний кресла. Он получает значение $T' = 2.33044 \text{ с}$ и приблизительно вычисляет свою массу. Он несколько сомневается в результате и пытается найти точное значение своей массы. Для этого он снова измеряет период колебаний пустого кресла и находит, что $T'_0 = 1.27396 \text{ с}$.

Чему равны истинные значения масс косманавта m_A и корабля m_C ? [4 балла]

Замечание: Масса пружины пренебрежимо мала и космонавт парит в пространстве.

Страна _____

Код участника _____

**ЛИСТ ОТВЕТОВ
ЗАДАЧИ № 1
ИЗМЕРЕНИЕ МАССЫ В НЕВЕСОМОСТИ**

1.

Масса кресла

$$m_0 =$$

2

Истинная масса космонавта

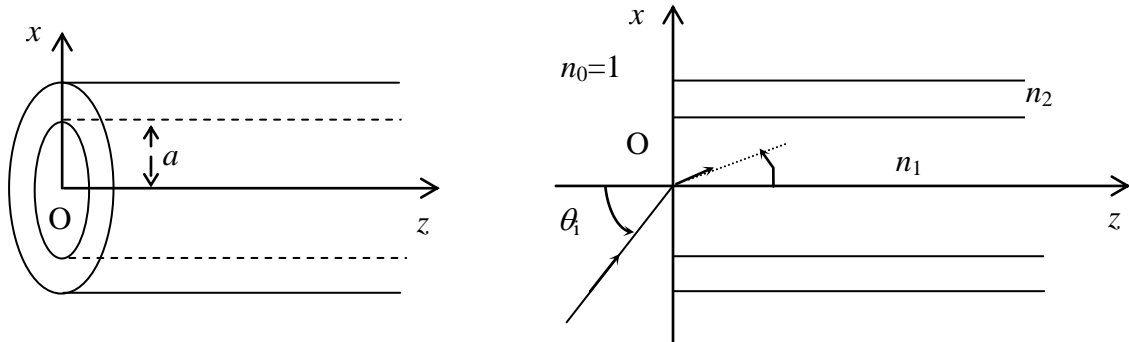
$$m_A =$$

Масса корабля

$$m_C =$$

Теоретический тур - задача № 2

Оптическое волокно



Оптическое волокно состоит из сердцевины цилиндрической формы радиуса a , изготовленной из прозрачного материала с коэффициентом преломления непрерывно изменяющимся от значения $n = n_1$ на оси сердцевины до значения $n = n_2$ ($1 < n_2 < n_1$) на расстоянии a от оси волокна в соответствии с формулой

$$n = n(x) = n_1 \sqrt{1 - \alpha^2 x^2},$$

где x – это расстояние от центра волокна, α – постоянная величина. Серцевина окружена оболочкой, изготовленной из материала с постоянным коэффициентом преломления. Волокно находится в воздухе, коэффициент преломления которого равен n_0 .

Направим ось Oz вдоль оси волокна. Точка O расположена в центре торца волокна.

Заданы значения: $n_0 = 1.000$; $n_1 = 1.500$; $n_2 = 1.460$; $a = 25$ мкм.

1. Луч монохроматического света падает на волокно в точке O . Угол падения равен θ_1 , плоскость падения совпадает с плоскостью xOz .

a. Покажите, что в каждой точке траектории луча света в волокне коэффициент преломления n и угол θ между лучом света и осью Oz связаны соотношением: $n \cos \theta = C$, где C некоторая постоянная. Выразите постоянную C через величины n_1 и θ_1 . [1.0 балл]

b. Используя результат, полученный в п.1а, и тригонометрическое соотношение $\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-1/2}$, где $\tan \theta = \frac{dx}{dz} = x'$ задает наклон касательной к траектории в точке (x, z) ,

выведите уравнение для x' . Выразите α через n_1 , n_2 и a . Продифференцировав обе части полученного равенства по переменной z , получите уравнение для второй производной x'' .

[1.0 балл]

c. Найдите выражения для x как функцию z , т.е. $x = f(z)$, которое удовлетворяет полученному выше уравнению для x'' . [1.0 балл]

d. Сделайте качественный рисунок траекторий двух лучей света в волокне, имеющих различные углы падения θ_1 . Изобразите по одному полному периоду для каждой траектории.

[1.0 балл]

2. Распространение света в оптическом волокне.

a. Найдите максимальный угол падения $\theta_{\text{м}}$, при котором луч света будет распространяться, не выходя за пределы сердцевины волокна. [1.0 балл]

b. Найдите выражение для координат z точек пересечения луча света осью Oz при $\theta_i \neq 0$. [1.0 балл]

3. Свет может быть использован для передачи сигналов в виде очень коротких световых импульсов (шириной импульса можно пренебречь).

a. Определите время τ , необходимое свету для прохождения расстояния от точки O до первой точки пересечения с осью Oz для угла падения $\theta_i \neq 0$ и $\theta_i \leq \theta_M$.

Отношение координаты z , первой точки пересечения луча с осью Oz , и времени τ , называют скоростью распространения светового сигнала вдоль волокна. Предполагается, что эта скорость изменяется монотонно как функция θ_i . Обозначим ее как v_M .

Найдите эту скорость для $\theta_i = \theta_M$.

Найдите также скорость распространения света вдоль оси Oz . Эту скорость обозначим через v_0 .

Сравните эти скорости. [3.25 балла]

b. Передающий световой пучок представляет собой сходящийся пучок лучей, углы падения θ_i которых лежат в диапазоне $0 \leq \theta_i \leq \theta_M$. Рассчитайте максимальную частоту повторения импульсов f в световом пучке, при которой на расстоянии $z = 1000$ м два последовательных импульса различимы, т.е. эти импульсы не перекрываются. [1.75 балла]

Указания

1. Волновые свойства света в этой задаче не учитываются
2. Дисперсией в волокне можно пренебречь
3. Скорость света в вакууме равна $c = 2.998 \times 10^8$ м/с
4. Вы можете использовать следующие формулы:

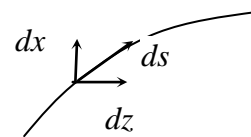
Длина очень маленького элемента дуги ds в плоскости xOz равна

$$\bullet \quad ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

$$\bullet \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \text{Arc sin } \frac{bx}{a}$$

$$\bullet \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2 \text{Arc sin } \frac{bx}{a}}{2b^3}$$

- $\text{Arcsin } x$ – функция обратная к функции синус. Ее значение равно меньшему из углов, синус которого равен x . Другими словами, если $y = \text{Arcsin } x$, то $\sin y = x$.



Страна _____

Код участника _____

**ЛИСТ ОТВЕТОВ
ЗАДАЧИ № 2
ОПТИЧЕСКОЕ ВОЛОКНО**

1а.
Выражение для C

$$n \cos \theta = C =$$

1б.
Уравнение для второй производной x''

1с.
Выражение для x

$$x = f(z) =$$

1д.
Качественный рисунок траекторий двух лучей света в волокне, имеющих различные углы падения θ_i .

2а.
Максимальный угол падения

$$\theta_{iM} =$$

2b.

Выражение для координат z точек пересечения луча света осью Oz

3a.

Выражение для τ

$$\tau =$$

Скорость распространения света при $\theta_1 = \theta_{1M}$

$$v_M =$$

Скорость распространения света при $\theta_1 = 0$

$$v_0 =$$

Сравните две скорости

3b.

Выражение для максимальной частоты повторения импульсов в световом пучке

$$f =$$

Численное значение для f при $z = 1000 \text{ м}$

$$f =$$

Теоретический тур - задача №3

Сжатие и расширение системы двух газов

Цилиндрический сосуд разделен на две части подвижной перегородкой NM . Левая часть сосуда ограничена неподвижной стенкой цилиндра и подвижной перегородкой NM (Рисунок 1). Она содержит один моль водяного пара. Правая часть ограничена подвижной перегородкой NM и подвижным поршнем AB . Эта часть содержит один моль газообразного азота N_2 .

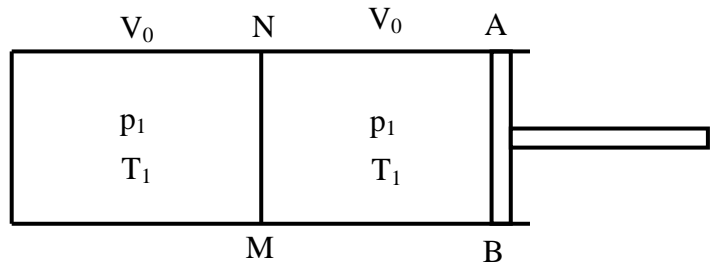


Рисунок 1

В начальном состоянии объемы и температуры газов в обеих частях равны. Перегородка NM является хорошим проводником тепла. Ее теплоемкость очень мала, и ей можно пренебречь.

Удельный объем воды в жидком состоянии пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом водяного пара при той же температуре.

Удельная скрытая теплота парообразования L определяется как количество теплоты, которое необходимо подвести к единице массы вещества для перевода его из жидкого состояния в парообразное при постоянной температуре. Для воды при 373 К удельная теплота парообразования равна $L = 2250$ кДж/кг.

1. Предположим, что поршень и стенки цилиндра проводят тепло, и что перегородка NM может свободно скользить без трения. Начальное состояние газов в сосуде определяется следующими величинами:

Давление $p_1 = 0.5$ атм.; общий объем $V_1 = 2V_0$; температура $T_1 = 373$ К.

Поршень AB медленно изотермически сжимает газы до состояния с конечным общим объемом $V_F = V_0/4$. Этот процесс совершается квазистатически, т.е. равновесно.

a. Нарисуйте график зависимости $p(V)$, т.е. кривую, представляющую зависимость давления p от общего объема V обоих газов в цилиндре при температуре T_1 . Вычислите координаты характерных точек на этой кривой.

[1.5 балла]

Газовая постоянная $R = 8.31$ Дж/(моль·К) или $R = 0.0820$ л·атм/(моль·К).

1 атм. = 101.3 кПа;

При давлении $p_0 = 1$ атм. температура кипения воды равна $T_0 = 373$ К.

b. Вычислите работу, совершенную поршнем в процессе сжатия газов.

[1.0 балл]

$$\int \frac{dV}{V} = \ln V$$

c. Вычислите количество теплоты, отданное системой в данном процессе.

[1.5 балла]

2. Во втором случае все условия такие же, как в случае 1, за исключением того, что между подвижной перегородкой NM и стенками цилиндра имеется трение. При этом перегородка NM смещается, только если разность давлений на противоположные стороны NM достигает 0.5 атм. или больше (в задаче предполагается, что коэффициент трения скольжения и максимальный коэффициент трения покоя равны).

a. Нарисуйте график функции $p(V)$, представляющий зависимость давления p в правой части сосуда как функцию от общего объема V обоих газов в цилиндре при постоянной температуре T_1 . [1.5 балла]

b. Вычислите работу, совершенную поршнем при сжатии газов. [0.5 балла]

c. После того, как общий объем газов достигает значения $V_F = V_0/4$, поршень начинает медленно смещаться вправо, совершая равновесный изотермический процесс расширения обоих компонент (воды и азота) до начального общего объема $2V_0$. Дорисуйте на диаграмме из п.2a кривую, представляющую этот процесс.

[2 балла]

Указания для п.2

Нарисуйте и заполните таблицу аналогичную приведенной ниже и используйте ее для построения графиков кривых из п.2a и п.2c

Состояние	Левая часть сосуда		Правая часть сосуда		Общий объем	Давление на поршень АВ
	Объем	Давление	Объем	Давление		
начальное	V_0	0.5 атм.	V_0	0.5 атм.	$2V_0$	0.5 атм.
2						
3						
...						
...						
...						
...						
...						
конечное					$2V_0$	

3. Предположим, что все стенки цилиндра и поршень являются теплоизолированными, подвижная перегородка NM зафиксирована и проводит тепло, и начальное состояние газов такое же, как в п.1. Поршень медленно смещается вправо, при этом объем правой части сосуда увеличивается до тех пор пока в левой части сосуда водяной пар не начнет конденсироваться.

a. Вычислите конечный объем правой части сосуда. [3 балла]

b. Вычислите работу, совершенную газом при этом расширении. [1 балл]

Отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ для азота равно $\gamma_1 = \frac{7}{5}$, для водяного пара равно $\gamma_2 = \frac{8}{6}$.

В интервале температур от 353К до 393К можно использовать следующую приближенную формулу:

$$p = p_0 \exp \left[- \frac{\mu L}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

где T – это температура кипения воды при давлении p , μ – это молярная масса воды. Значения величин p_0 , L и T_0 заданы выше.

Страна _____

Код участника _____

ЛИСТ ОТВЕТОВ
ЗАДАЧИ № 3
СЖАТИЕ И РАСШИРЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ГАЗОВ

1.
 - a. Изотерма на диаграмме p - V .
(Запишите координаты характерных точек изотермы)

- b. Работа A , совершенная поршнем в процессе сжатия газов

$$A =$$

- c. Количество теплоты Q' , отданное системой в данном процессе

$$Q' =$$

2.

а. и с. Графики функций $p(V)$, представляющих процесс сжатия газов (п.а) и процесс расширения газов (п.с)

(Запишите координаты характерных точек кривых).

Заполните следующую таблицу, записав координаты состояний, определяющих характерные стадии процессов сжатия (п.а) и расширения (п.б) газов

Состояние	Левая часть сосуда		Правая часть сосуда		Общий объем	Давление на поршень АВ
	Объем	Давление	Объем	Давление		
1	V_0	0.5 атм.	V_0	0.5 атм.	$2V_0$	0.5 атм.
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9					$2V_0$	

б. Работа $A_{п}$, совершенную поршнем при сжатии газов

$$A_{п} =$$

3.

а. Конечный объем V' правой части сосуда, когда в левой части сосуда водяной пар начнет конденсироваться

$$V' =$$

б. Работа A , совершенную газом при этом расширении

$$A =$$