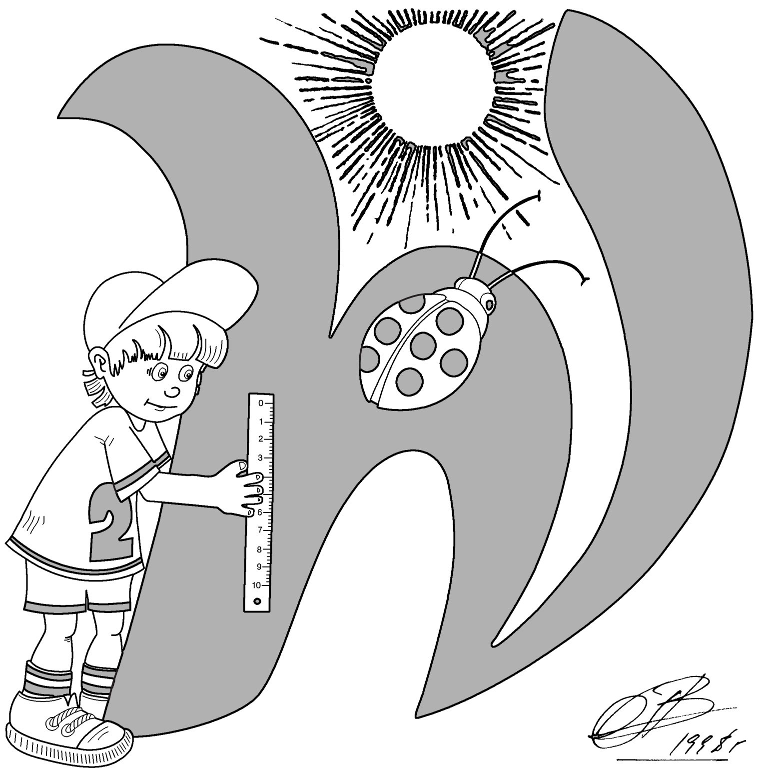
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Саратов, 2000/2001 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Иоголевич И.	1. Слободянин В.	1. Чудновский А.
2. Чудновский А.	2. Шеронов А.	2. См. 2 задачу 10 кл.
3. Козел С.	3. Чивилев В.	3. Вавилов В.
4. Слободянин В.	4. Чешев Ю.	4. Можаев В.
	5. Иоголевич И.	5. Чудновский А.

Общая редакция — Козел С., Слободянин В.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Кулигин Л., Макаров А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:41.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Флажок

С высокого берега озера за веревку подтягивают лодку. К веревке привязан флажок C. В момент, когда флажок оказался посередине участка AB, веревка была направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найдите скорость флажка в этот момент, если известно, что скорость лодки составляла $u = 1$ м/с. Веревка нерастяжима.

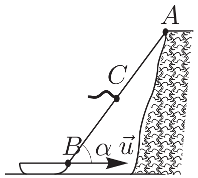


Рис. 1

Задача 2. Платформа на резинке

Горизонтальная платформа массы $M = 300$ г подвешена на резиновом жгуте AB как показано на рис. 2. Жгут проходит сквозь отверстие в грузе. Масса груза $m = 100$ г. Система находится в равновесии. Затем груз отпускают без начальной скорости с высоты h относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении h жгут порвется, если его максимально допустимое удлинение $x_k = 8$ см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения приведена на рис. 3. Удар груза о платформу считать абсолютно неупругим.

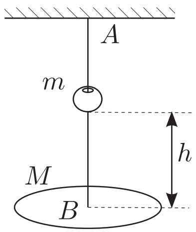


Рис. 2

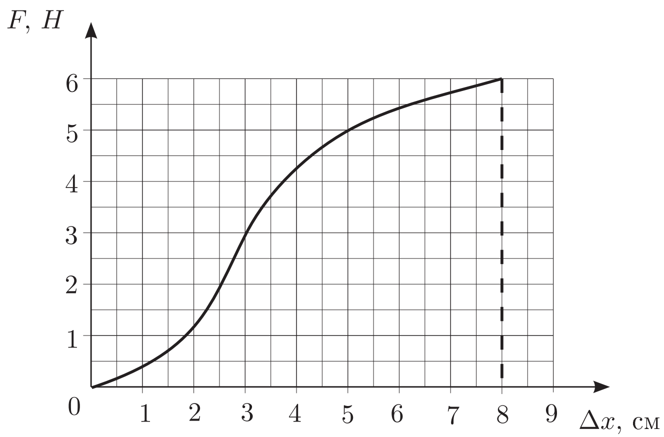


Рис. 3

Задача 3. Теплопровод

В теплоизолированном сосуде находится смесь воды и льда при температуре $t_1 = 0^\circ$C. Через стенку в сосуд вводится торец медного стержня, боковые стенки которого покрыты теплоизолирующем слоем. Другой торец стержня погружен в воду, кипящую при атмосферном давлении. Через время $\tau_м = 15$ мин весь лед в сосуде растаял. Если бы вместо медного стержня в этом эксперименте был использован стальной стержень того же сечения, но другой длины, то весь лед растаял бы через время $\tau_с = 48$ мин.

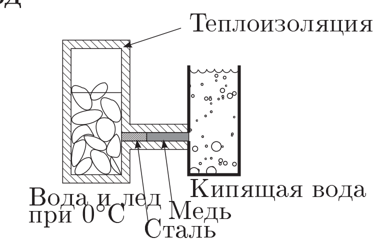


Рис. 4

Стержни соединяют последовательно (см. рис.). Какой будет температура t в месте соприкосновения медного и стального стержней? Рассмотрите два случая:

1. кипящая вода соприкасается с торцом медного стержня;
2. кипящая вода соприкасается с торцом стального стержня.

Через какое время τ растает весь лед при последовательном соединении стержней? Будет ли это время одинаково в случаях 1 и 2?

Задача 4. Перемычки

Электрическая цепь составлена из семи последовательно соединенных резисторов: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_6 = 6$ кОм, $R_7 = 7$ кОм и четырех перемычек (рис. 5). Входное напряжение $U = 53{,}2$ В. Укажите резистор, через который протекает ток минимальной силы. Найдите значение силы тока через этот резистор. Через какой резистор протекает ток максимальной силы? Найдите ее значение.

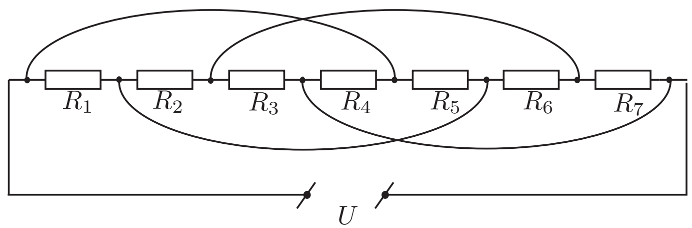


Рис. 5

10 класс

Задача 1. Тормозной путь

Легковой автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Если водитель заблокирует задние колеса, тормозной путь машины составит $L_1 = 28$ м. Если водитель заблокирует передние колеса, тормозной путь будет равен $L_2 = 16$ м. Каким окажется тормозной путь машины, если заблокировать все четыре колеса? Известно, что центр масс автомобиля расположен на равных расстояниях от осей передних и задних колес, диаметр которых одинаков.

Задача 2. Обрывки рукописи

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для $\nu = 1$ моль гелия в координатах pV. Цикл состоял из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла $\eta = 0{,}125$. Масштаб по оси объема: 1 дел = 0,5 л; по оси давления: 1 дел $= 5 \cdot 10^3$ Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

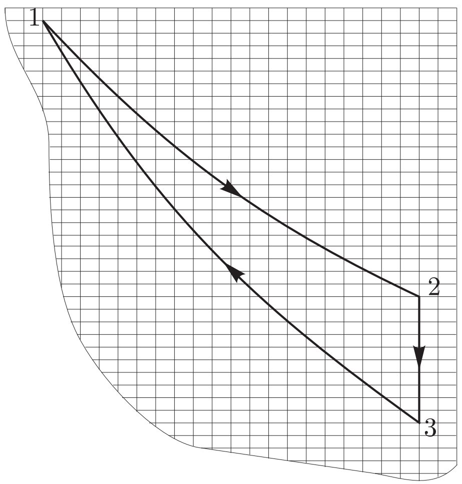


Рис. 6

Задача 3. Сферический конденсатор

Сферический конденсатор с радиусами обкладок $R_1 = R$ и $R_3 = 3R$ подсоединен к источнику с постоянным напряжением U (рис. 7). Пространство между обкладками заполнено двумя слоями различных веществ с удельными сопротивлениями $\rho_1 = \rho$ и $\rho_2 = 2\rho$ и диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Радиус сферической границы между слоями $R_2 = 2R$. Удельная проводимость слоев между обкладками конденсатора намного меньше удельной проводимости материала обкладок.

1. Найдите заряд на границе между слоями различных веществ.
2. Найдите силу тока, протекающего через конденсатор.

Задача 4. Плоский конденсатор

В плоский конденсатор емкостью C_0 вдвигается диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор включен в электрическую цепь, представленную на рисунке. При этом оказалось, что сила тока, протекающего через батарею с ЭДС $\mathscr{E}_1$ постояненна и равна I_0. Обе батареи идеальные.

1. Определите силу тока, протекающего через резистор с сопротивлением R_1.
2. С какой скоростью движется диэлектрическая пластина? При расчетах считайте, что ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ заданы, $R_1 = R_2 = R$, длина пластин конденсатора C_0 равна l.

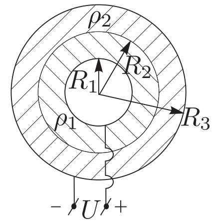


Рис. 7

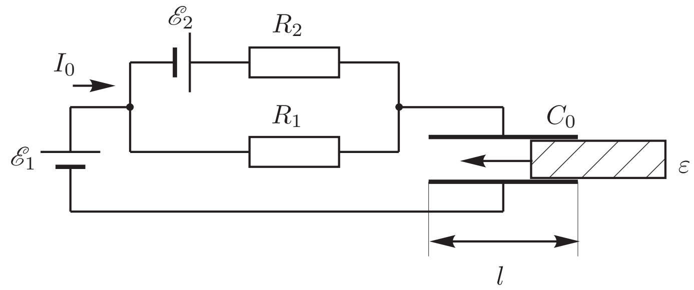


Рис. 8

Задача 5. Линза на зеркале

На поверхности плоского зеркала лежит тонкая симметричная двояковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F_0 = 8$ см.

1. Где будет находиться изображение точечного источника, помещенного на расстоянии $l_1 = F_0$ от линзы?
2. На поверхность зеркала наливают воду так, что уровень воды совпадает с плоскостью симметрии линзы. Если теперь точечный источник поместить на расстоянии $l_2 = 12$ см от линзы, то его изображение совпадет с самим источником. На каком расстоянии от линзы нужно расположить точечный источник, чтобы его изображение совпало с ним самим, если долить воды так, чтобы она полностью скрыла линзу?

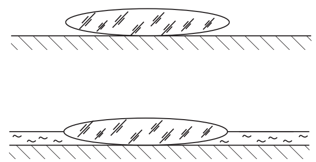


Рис. 9

Примечание. Оптические силы тонких линз, расположенных вплотную друг к другу, складываются.

11 класс

Задача 1. Скольжение с внутренними колебаниями

На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в начальный момент покоится ящик, в котором есть груз массы m, совершающий колебания по закону $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ с периодом T и амплитудой A вдоль прямой, перпендикулярной наклонной плоскости. Коэффициент трения ящика о плоскость $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Найдите среднюю скорость движения ящика за время много большее T, полагая, что ящик все это время двигался поступательно и не подпрыгивал по наклонной плоскости. Найдите условие, при котором ящик не будет подпрыгивать. Суммарная масса ящика и груза равна M.

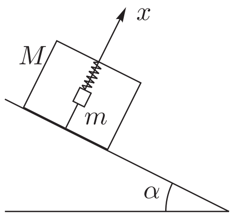


Рис. 10

Задача 2. Обрывки рукописи

Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для $\nu = 1$ моль гелия в координатах pV. Цикл состоял из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла $\eta = 0{,}125$. Масштаб по оси объема: 1 дел = 0,5 л; по оси давления: 1 дел = $5\cdot 10^3$ Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

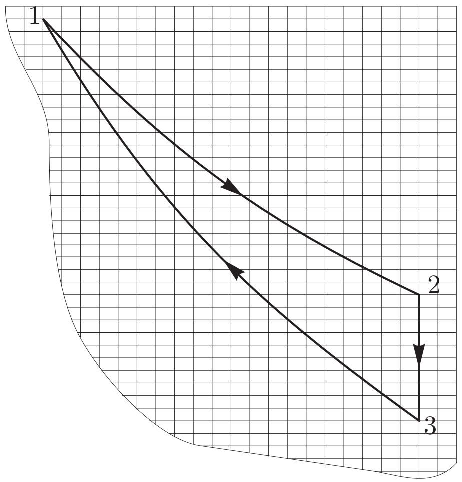


Рис. 11

Задача 3. Нелинейный элемент

Схема, изображенная на рис. 12, состоит из батареи с ЭДС $\mathscr{E} = 10$ В, резистора сопротивлением $R = 100$ Ом, конденсатора емкости $C = 8$ мкФ и нелинейного элемента НЭ, вольтамперная характеристика которого изображена на рис. 13. В некоторый момент времени ключ K замыкается. Предполагая, что сила тока, протекающего через НЭ в любой момент времени много меньше силы тока, протекающего через батарею, определите количество теплоты, выделившейся на НЭ.

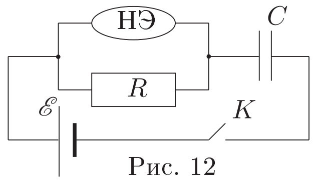


Рис. 12

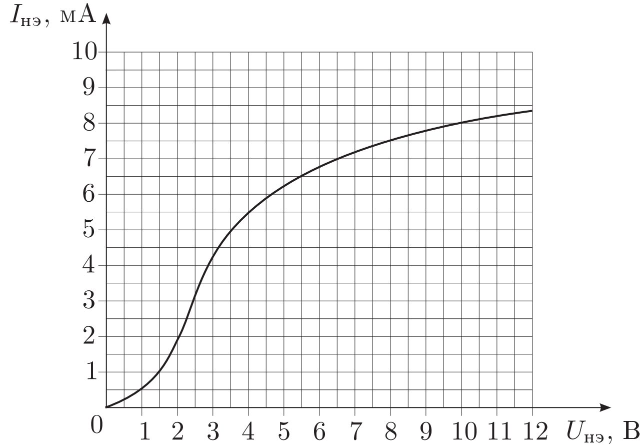


Рис. 13

Задача 4. Запутанный колебательный контур

Схема состоит из конденсатора емкостью C, идеальных диодов D_1 и D_2 и катушек с индуктивностями L_1 и $L_2 = 4L_1$. В начальный момент ключ К разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения V_0. Найдите зависимость силы тока через катушку L_2 от времени после замыкания ключа и нарисуйте график этой зависимости.

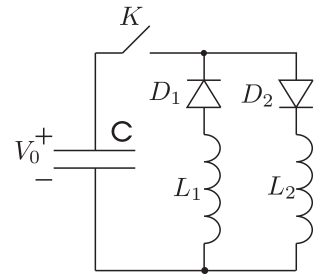


Рис. 14

Задача 5. Палочка и линза

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет — палочка длины l, и ее изображение длины l'. От времени чернила выцвели, и остались видны только две точки: вершина палочки S и ее изображение S'. Из текста следовало, что главная оптическая ось проходила через середину палочки перпендикулярно ей. Определите построением положения линзы, главной оптической оси, фокусов линзы, предмета и его изображения и укажите, какая это линза (собирающая или рассеивающая), если $l = 5$ см, $l' = 2$ см, $SS' = 15$ см.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Флажок

Рассмотрим проекции скорости точки C на направления вдоль веревки и перпендикулярно ей: $v_п$ и v_L (рис. 15). Так как веревка нерастяжима,

$$v_п = u_п = u\cos\alpha.$$

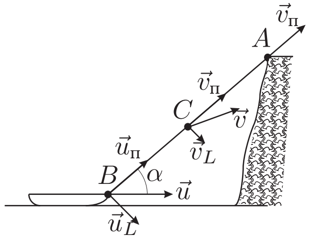


Рис. 15

В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_п$, точки B и C в данный момент времени вращаются вокруг общего центра (точки A на веревке) со скоростями v_L и u_L. Так как $AB/AC = 2$, то $v_L = \frac{1}{2}u_L = \frac{1}{2}u\sin\alpha$. Тогда

$$v = \sqrt{v_п^2 + v_L^2} = u\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha} \approx 0{,}66 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Платформа на резинке

Введем обозначения: x_n — начальное положение равновесия платформы, $E(x)$ — потенциальная энергия растянутого жгута. Поскольку в положении равновесия платформы $F(x_n) = Mg = 3$ Н, то из графика находим $x_n = 3$ см. При падении с высоты h скорость груза $v = \sqrt{2gh}$. При неупругом ударе импульс системы груз-платформа сохраняется: $mv = (M+m)u$. Их скорость сразу после удара

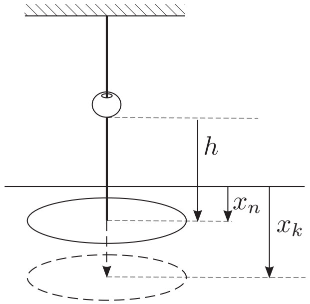


Рис. 16

$$u = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Для дальнейшего движения можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$E(x_n) - (M+m)gx_n + \frac{M+m}{2}u^2 = E(x_k) - (M+m)gx_k. \qquad (2)$$

Так как разность между $E(x_k)$ и $E(x_n)$ равна работе силы натяжения жгута, то ее можно найти как площадь под графиком $F(x)$:

$$E(x_k) - E(x_n) \approx 25 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

При этом погрешность численного определения работы не более 0,5 Н·см. Подставив выражение (1) в уравнение (2), получим

$$h = \frac{M+m}{m^2 g}(E(x_k) - E(x_n)) - (\frac{M+m}{m})^2(x_k - x_n) \approx 20 \text{ см}.$$

Задача 3. Теплопровод

Тепловой поток, то есть количество теплоты, протекающей в единицу времени по стержню с заданными значениями длины и поперечного сечения, зависит от материала стержня и от разности температур на его концах. Когда медный и стальной стержни использовались поодиночке, по ним протекло одинаковое количество теплоты Q, необходимое для плавления всей массы льда:

$$Q = K_м(t_2 - t_1)\tau_м = K_с(t_2 - t_1)\tau_с,$$

где $K_м$ и $K_с$ — коэффициенты пропорциональности, $t_2 = 100°$C — температура кипящей воды. Отсюда

$$K_m/K_с = \tau_с/\tau_м = \beta = 3{,}2.$$

При последовательном соединении стержней по ним протекают одинаковые потоки. Для случая 1, когда в кипящую воду погружен торец медного стержня, имеем:

$$K_м(t_2 - t) = K_с(t - t_1),$$

где t — температура в месте соприкосновения стержней. Отсюда следует:

$$t = (\beta t_2 + t_1)/(1+\beta) = 76°\text{C}.$$

Аналогично, для случая 2, когда в кипящую воду погружен торец стального стержня, получим:

$$t = (t_2 + \beta t_1)/(\beta + 1) = 23{,}8°\text{C}.$$

Время τ, необходимое для плавления всей массы льда при последовательном соединении стержней, найдется из соотношения

$$Q = K_м(t_2 - t_1)\tau_м = K_м(t_2 - t)\tau.$$

Это соотношение записано для случая 1. Для определения τ можно использовать и другие аналогичные соотношения.

$$\tau = (t_2 - t_1)/(t_2 - t)\tau_м = \tau_с + \tau_м = 63 \text{ мин}.$$

Время τ в случаях 1 и 2 одинаково.

Задача 4. Перемычки

Рассмотрим эквивалентную схему цепи (рис. 17).

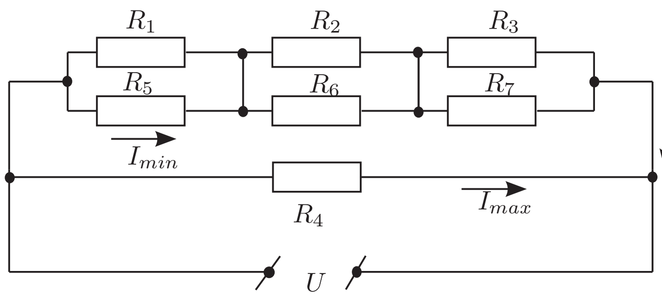


Рис. 17

Сопротивление $R_{1,5}$ параллельно соединенных резисторов R_1 и R_5 равно $R_{1,5} = \frac{R_1 R_5}{R_1+R_5} = \frac{5}{6}$ кОм. Аналогично, $R_{2,6} = \frac{3}{2}$ кОм и $R_{3,7} = \frac{21}{10}$ кОм. Таким образом, сопротивление всей верхней цепочки из 6 резисторов $R_0 = R_{1,5} + R_{2,6} + R_{3,7} = 4\frac{13}{30}$ кОм. Поскольку $R_0 > R_4$, ток максимальной силы будет протекать через R_4: $I_{max} = \frac{U}{R_4} = 13{,}3$ мА. Сила тока, протекающего через верхнюю цепочку, $I_0 = U/R_0 = 12$ мА. Суммарная сила токов, протекающих через пары параллельных резисторов, одинакова для каждой пары; в паре же силы токов относятся друг к другу обратно пропорционально сопротивлениям. Отсюда следует, что ток минимальной силы будет протекать через R_5: $I_{min} = 2$ мА.

10 класс

Задача 1. Тормозной путь

Пусть центр масс автомобиля расположен на высоте h относительно полотна дороги, расстояние между осями передних и задних колес равно l. Для случая торможения задними колесами, запишем уравнения моментов относительно точки O_1: $N_2 l - mgl/2 + \mu N_2 h = 0$. Отсюда $N_2 = \frac{mg}{2(1+\mu h/l)}$. Работа силы трения равна

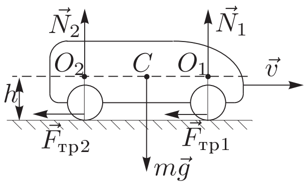


Рис. 18

$$A_1 = \mu N_2 L_1 = \mu \frac{mgL_1}{2(1+\mu h/l)} \qquad (1)$$

Аналогично, при торможении передними колесами уравнение моментов относительно точки O_2:

$$\frac{mgl}{2} - N_1 l + \mu N_1 h = 0, \qquad \text{или} \qquad N_1 = \frac{mg}{2(1-\mu h/l)}.$$

Работа сил трения

$$A_2 = \mu N_1 L_2 = \frac{\mu mgL_2}{2(1-\mu h/l)}. \qquad (2)$$

При торможении всеми четырьмя колесами

$$A_3 = \mu mgL_3. \qquad (3)$$

Поскольку $mv_0^2/2 = A_1 = A_2 = A_3$, то совместное решение уравнений (1), (2) и (3) дает

$$L_3 = \frac{L_1 + L_2}{4} = 11 \text{ м}.$$

Задача 2. Обрывки рукописи

По определению КПД цикла равен $\eta = \frac{A}{Q_+}$, где A — работа, совершенная газом за цикл, Q_+ — количество теплоты, отданной нагревателем газу за цикл. Для данного цикла $A = A_T + A_V + A_Q = A_T + A_Q$, где A_T, A_V, A_Q — работы, совершенные газом соответственно в изотермическом, изохорическом и адиабатическом процессах. Очевидно, $Q_+ = A_T$. Следовательно, $\eta = \frac{A}{A_T}$. Обратите внимание на то, что количество теплоты, полученное газом от нагревателя численно равно положительной работе, совершенной газом.

$\eta = \frac{A_T + A_Q}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A_T} = 1 + \frac{A_Q}{A - A_Q}$. (1)

Работа, совершаемая газом за данный цикл, равна площади, ограниченной линиями $1-2-3-1$: $A \approx (81 + \frac{1}{2}\cdot 70)$ ед$= 116$ ед $= 290$ Дж (1 ед.$= 5\cdot 10^3$ Па$\cdot 5\cdot 10^{-4}$ м^3 $= 2{,}5$ Дж). При этом погрешность численного определения A не более 5 ед.

Работа газа на адиабатическом участке равна с обратным знаком изменению внутренней энергии на участке $3-1$:

$A_Q = -\nu C_V(T_1 - T_3) = -\nu\frac{3}{2}R(T_2 - T_3) = -\frac{3}{2}V_2(p_2 - p_3)$. (2)

Из рисунка $p_2 - p_3 = 5\cdot 10^4$ Па. Из (1) и (2) получим:

$$V_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1-\eta}{\eta}\cdot\frac{A}{p_2 - p_3} = (27 \pm 1) \text{ л}.$$

Задача 3. Сферический конденсатор

Пусть заряд обкладок конденсатора Q_1 и Q_3, а заряд на границе слоев Q_2. Запишем закон сохранения заряда: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ (1). Разность потенциалов между обкладками равна U, то есть

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R} + \frac{Q_2}{2R} + \frac{Q_3}{3R}\right) = U. \quad (2)$$

Воспользуемся законом Ома, выраженным в дифференциальной форме: $j = E/\rho$. Плотность тока, т.е. сила тока, протекающего через единичную площадку, по обе стороны границы слоев одинакова. Поэтому для пограничной области радиуса R_2

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{(2R)^2} = \frac{1}{2\rho}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{(2R)^2} + \frac{Q_2}{(2R)^2}\right)$$

отсюда

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) находим $Q_2 = \frac{24}{5}\pi\varepsilon_0 UR$. Плотность тока вблизи обкладки радиуса R:

$$j = \frac{1}{\rho}\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{6U}{5\rho R}.$$

Тогда сила тока, текущего через конденсатор,

$$I = 4\pi R^2 j = \frac{24\pi UR}{5\rho}.$$

Задача 4. Плоский конденсатор

1. Ясно, что $I_0 = I_1 + I_2$. Из закона Ома $I_2 R_2 - I_1 R_1 = \mathscr{E}_2$. Отсюда следует, что при $R_1 = R_2 = R \quad I_1 = (I_0 - \mathscr{E}_2/R)/2 = const$.

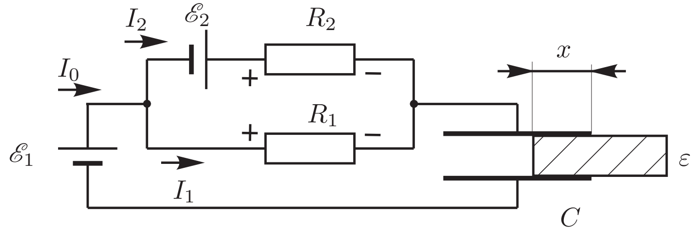


Рис. 19

2. Из закона Ома $I_1 R_1 + q/C = \mathscr{E}_1$,(1) где q — заряд на конденсаторе, а C — емкость конденсатора с вдвигающейся в него диэлектрической пластиной: $C = C_0 + C_0(\varepsilon - 1)x/l$.(2) Из уравнения (1) находим: $\Delta q = (\mathscr{E}_1 - I_1 R_1)\Delta C$, или $\Delta q/\Delta t = I_0 = (\mathscr{E}_1 - I_1 R_1)\Delta C/\Delta t = const$.(3) Из уравнения (2) $\Delta C/\Delta t = \frac{C_0(\varepsilon-1)}{l}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{C_0(\varepsilon-1)}{l}v$.(4) Из уравнения (3) следует, что скорость движения пластины постоянна: $v = \Delta x/\Delta t = const$. Подставляя в (3) выражение для силы тока I_1 и принимая во внимание (4), найдем:

$$v = \frac{2I_0 l}{(2\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 - I_0 R)C_0(\varepsilon - 1)}.$$

Задача 5. Линза на зеркале

1. В первом случае луч света проходит через линзу два раза. Следовательно, система эквивалентна одной линзе с оптической силой $D_1 = 2D_0$. Источник находился на расстоянии $F_0 = 2F_1$, т.е. на двойном фокусном расстоянии. Поэтому изображение совпадает с самим источником: $l_1 = F_0 = 8$ см.

2. Когда линза погружена в воду наполовину, то эквивалентная оптическая сила системы $D_2 = 2D_0 + 2D$, где D — оптическая сила водяного слоя под линзой, то есть $\frac{1}{F_2} = \frac{2}{F_0} + 2D$. Из условия задачи $l_2 = 2F_2$. Следовательно,

$$\frac{2}{l_2} = \frac{2}{F_0} + 2D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{F_0 - l_2}{l_2 F_0} < 0.$$

3. Аналогично, в третьем случае $D_3 = 2D_0 + 4D$; $l_3 = 2F_3$.

$$\frac{2}{l_3} = \frac{2}{F_0} + 4\frac{F_0 - l_2}{l_2 F_0}.$$

Отсюда следует:

$$l_3 = \frac{l_2 F_0}{2F_0 - l_2} = 24 \text{ см}.$$

11 класс

Задача 1. Скольжение с внутренними колебаниями

Обозначим $\omega = 2\pi/T$, тогда колебания груза примут вид $x = A\sin\omega t$. Запишем второй закон Ньютона для груза:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos\alpha + F, \quad (1)$$

где F — сила, действующая на груз со стороны ящика, $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$. Реакция наклонной плоскости, действующая на ящик, $N = (M - m)g\cos\alpha + F$. Подставив выражение для F из (1), получим $N = Mg\cos\alpha - \omega^2 Am\sin\omega t$.

Ящик не будет подпрыгивать, если в любой момент времени $N > 0$, что выполняется при $Mg\cos\alpha > \omega^2 Am$, то есть $\frac{M}{m} > \frac{4\pi^2}{gT^2}\frac{A}{\cos\alpha}$. Пусть сила трения всегда максимальна, тогда ускорение системы ящик-груз $a(t) = \frac{Mg\sin\alpha - \mu N}{M} = \frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha A\omega^2\sin\omega t$. Скорость системы

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = \frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha A\omega(1 - \cos\omega t).$$

Очевидно, что груз находится в положении равновесия в моменты времени, когда $v = 0$, а поскольку $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, то сила трения максимальна во время всего движения, как мы и предполагали. Скорость ящика изменяется с периодом T, поэтому средняя скорость за большое время

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = 2\pi\frac{Am}{TM}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 2. Обрывки рукописи

См. 2 задачу 10 кл.

Задача 3. Нелинейный элемент

Пусть q — заряд конденсатора. По закону Ома $U_{\text{н}} + q/C = \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad dq = -CdU_{\text{н}}$. Рассмотрим малый отрезок времени dt:

$$dq = (I_{\text{н}} + \frac{U_{\text{н}}}{R})dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dq}{I_{\text{н}} + \frac{U_{\text{н}}}{R}} \approx -\frac{RCdU_{\text{н}}}{U_{\text{н}}},$$

т.к. $I_{\text{н}} \ll \frac{U_{\text{н}}}{R}$.

Выделившееся на НЭ количество теплоты равно:

$$Q = \int_0^\infty U_{\text{н}} I_{\text{н}} dt \approx -RC\int_{10\text{ В}}^{0\text{ В}} I_{\text{н}} dU_{\text{н}},$$

т.к. при протекании тока напряжение на НЭ изменяется в пределах от $\mathscr{E}$ в первый момент времени до нуля по окончании зарядки конденсатора. Поэтому $Q = RCS$, где S — площадь под графиком ВАХ. По графику определяем, что $S = (51{,}5 \pm 0{,}5)$ мВт, значит, $Q = (41{,}2 \pm 0{,}4)$ мкДж.

Задача 4. Запутанный колебательный контур

1. Сразу после замыкания ключа конденсатор будет разряжаться через катушку L_2. Зависимость силы тока $I_2(t)$ от времени будет иметь вид: $I_2(t) = V_0\sqrt{\frac{C}{L_2}}\cdot\sin\omega_{01}t = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L_1}}\sin\omega_{01}t$, где $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_2C} = 1/(2\sqrt{L_1C})$ — собственнная частота L_2C-контура. Эта зависимость будет иметь место при $0 \leqslant t \leqslant \pi\sqrt{L_1C}$.

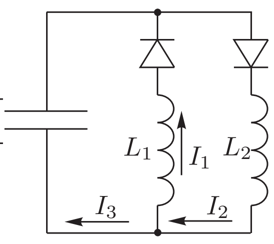


Рис. 20

2. Рассмотрим теперь характер изменения силы тока I_2 после того, как она достигнет максимального значения. Для произвольного момента времени направления токов изображены на рис. 20. Запишем закон Ома для контура, охватывающего обе катушки: $L_1\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} = 0$. Отсюда следует, что $L_1I_1 + L_2I_2 = const$. Константа, очевидно, равна $V_0\sqrt{L_2C}$. Из условия непрерывности тока следует, что $I_2 = I_1 + I_3$. Для контура, в который входят катушка L_2 и конденсатор C, можно записать: $L_2\frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C} = 0$.

Продифференцировав это выражение по времени, получим: $L_2\frac{d^2I_2}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$. Но $\frac{dq}{dt} = I_3$, а $I_3 = I_2 - I_1 = I_2 + \frac{L_2}{L_1}I_2 - \frac{V_0}{L_1}\sqrt{L_2C}$. С учетом сделанных замечаний окончательно получим: $\frac{d^2I_2}{dt^2} + \frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}I_2 = \frac{V_0}{L_1\sqrt{L_2C}}$. Собственная частота контура $\omega_{02} = \sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{L_1C}}$. Решение ищем в виде: $I_2 = A\cos(\omega_{02}t) + B\sin(\omega_{02}t) + \frac{V_0\sqrt{L_2C}}{L_1+L_2}$. Константы A и B находим из начальных условий: при $t = 0$ сила тока в катушке L_2 максимальна и равна $V_0\sqrt{\frac{C}{L_2}}$, а производная $\frac{dI_2}{dt} = 0$. Используя данные условия, получим, что $A = V_0\sqrt{\frac{C}{L_2}}\frac{L_1}{L_1+L_2}$, а $B = 0$. Отсюда: $I_2(t) = V_0\sqrt{\frac{C}{L_2}}\frac{L_1}{L_1+L_2}(\cos(\omega_{02}t) + \frac{L_2}{L_1})$. С учетом того, что $L_2 = 4L_1$, получим: $I_2(t) = \frac{V_0}{10}\sqrt{\frac{C}{L_1}}(\cos(\omega_{02}t) + 4)$.

Обе зависимости $I_2(t)$ изображены на рис. 21, где $t_1 = \pi\sqrt{L_1C}$, $t_2 = \pi\sqrt{L_1C}(1 + \frac{1}{\sqrt{5}})$, $t_3 = \pi\sqrt{L_1C}(1 + \frac{2}{\sqrt{5}})$, $t_4 = \pi\sqrt{L_1C}(1 + \frac{3}{\sqrt{5}})$.

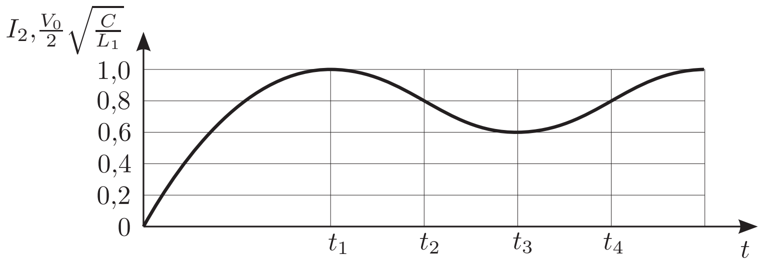


Рис. 21

Задача 5. Палочка и линза

1. Проведем прямую SS', оптический центр линзы O лежит где-то на ней.

2. Середина палочки M и ее изображение N лежат соответственно на расстояниях $l/2$ и $l'/2$ от S и S', т.е. на окружностях радиусов $l/2$ и $l'/2$ с центрами в S и S'. Из условия следует, что MN — главная оптическая ось, причем она перпендикулярна палочке и изображению, а значит, и проведенным в точки M и N радиусам указанных окружностей. Поэтому проведем MN так, чтобы она касалась обеих окружностей. Это можно сделать четырьмя способами, два из которых показаны на рис. 22, 23, а еще два являются их симметричными отображениями относительно SS'. Ход дальнейших построений одинаков для всех случаев.

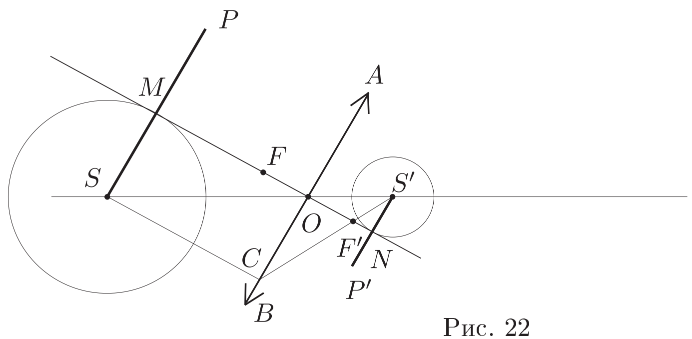


Рис. 22

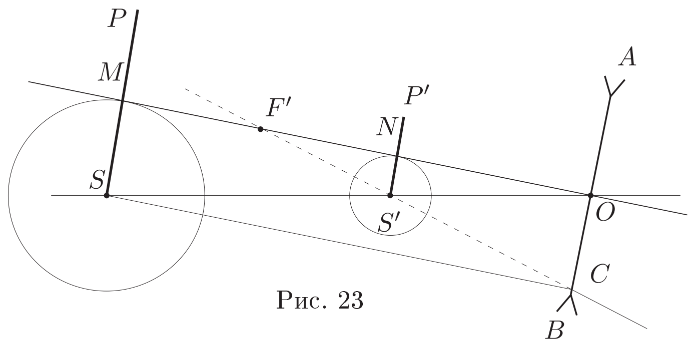


Рис. 23

3. Оптический центр O линзы находится на пересечении MN и SS'.

4. Линзу AB построим как перпендикуляр к MN в точке O.

5. На рис. 1 S и S' находятся по разные стороны линзы, следовательно, линза собирающая, а S' — действительное изображение. Во втором случае изображение мнимое и уменьшенное, значит линза отрицательная.

6. Любой луч, вышедший из S, должен прийти в S'; поэтому пустим луч $SC||MN$; тогда точка пересечения преломленного луча CS' (или его продолжения) и прямой MN будет фокусом F'. Второй фокус F находим из симметрии относительно плоскости линзы.

7. Предмет и изображение найдем, достроив их симметрично главной оптической MN.