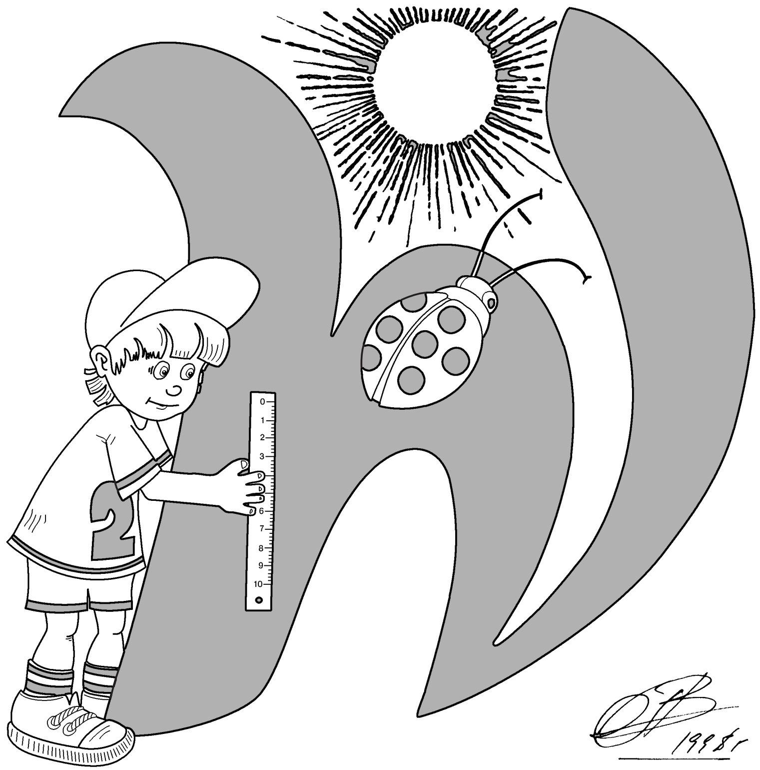
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Районно-городской этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2010/2011 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

7 класс

1. Осин М.
2. Фольклор
3. Фольклор
4. Слободянин В.

8 класс

1. Фольклор
2. Слободянин В.
3. Осин М.
4. Фольклор

9 класс

1. Фольклор
2. Флеминг Я.
3. Кармазин С.
4. Слободянин В.
5. Проскурин М.

10 класс

1. Кармазин С.
2. Фольклор
3. Кармазин С.
4. Фольклор
5. Колесов Ю.

11 класс

1. Кармазин С.
2. Фольклор
3. Слободянин В.
4. Кармазин С.
5. Слободянин В.

Общая редакция — Ко́зел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Сметнёв Д., Старков Г., Кудряшова Н.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 30 ноября 2010 г. в 02:49.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

Критерии оценивания

Построено изображение S_1 2
Построено изображение S_{12} 2
Построено изображение S_{123} 1
Построена точка K и участок луча KO 2
Построены точки L и участок луча LK 2
Остальные построения 1

7 класс

Задача 1. Баррель и галлон

В одном галлоне 3,79 литра. Один баррель (barrel — бочка) лёгкой нефти весит 111 кг. Удельная плотность нефти $\rho_н = 698$ кг/м^3. Во сколько раз баррель больше галлона?

Задача 2. Червяк и улитка

Однажды червяк и улитка соревновались в скорости передвижения. Они преодолевали участок длиной L, при этом улитка двигалась с постоянной скоростью $v_у = 36$ мм/мин. Червяк же прополз часть пути длиной $L_1 = 4$ дюйма со скоростью $v_1 = 30$ мм/мин, а оставшуюся часть пути со скоростью $v_2 = 45$ мм/мин. Определите длину участка L, если известно, что участники финишировали одновременно?

Задача 3. Пластилиновый куб

Деревянный куб с длиной ребра $L_0 = 10$ см облепили со всех сторон пластилином так, что получился куб с длиной ребра $L_1 = 12$ см. Сколько потребовалось килограммов пластилина, если его плотность $\rho = 1370$ кг/м^3?

Задача 4. Плохой термометр

Экспериментатору Глюку показалось, что у него поднялась температура. Он измерил её медицинским термометром, после чего неудачно стряхнул градусник, в результате часть ртути, заполняющей капилляр градусника, оторвалась от основной массы, и образовался разрыв (рис. 1).

Известно, что объём ртути в колбочке термометра значительно превышает объём ртути в капилляре. Тепловым расширением ртути, находящейся в капилляре, можно пренебречь. В свободной от ртути части капилляра — вакуум.

Какова температура экспериментатора? До какой температуры нужно нагреть термометр, чтобы разрыв исчез? Ответы обоснуйте.

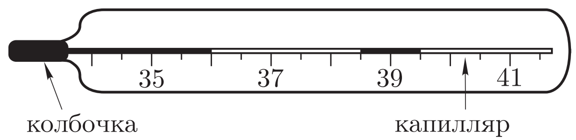


Рис. 1

8 класс

Задача 1. Домино

Кость для игры в домино, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ (причём $a < b < c$), стоит на столе своей наименьшей гранью и оказывает на него давление $p = 1{,}0 \cdot 10^3$ Па. Известно, что $a = 6{,}0$ мм, $b = 24$ мм.

Определите массу игральной кости. Постоянная $g = 9{,}8$ Н/кг.

Задача 2. Брусочки

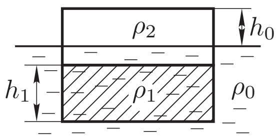


Рис. 2

Конструкция, состоящая из двух склеенных брусков, плавает в воде, находясь в горизонтальном положении и возвышаясь на $h_0 = 23{,}2$ мм над поверхностью воды (рис. 2). Выступающую над водой часть верхнего бруска удаляют (разрез проходит вдоль уровня воды). Оказалось, что новая конструкция также плавает горизонтально, выступая над водой на ту же высоту h_0. Определите плотность ρ_2 верхнего бруска и толщину h_1 нижнего бруска. Плотность нижнего бруска $\rho_1 = 420$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

Задача 3. Парсек

Расстояния между звёздами столь велики, что их принято измерять в *астрономических единицах* или *парсеках*. Одна астрономическая единица (а.е.) численно равна среднему расстоянию от Земли до Солнца 1 а.е. $= R_З =\approx$ ≈ 150 млн км. Один парсек — это расстояние, с которого радиус земной орбиты виден под углом в одну угловую секунду. В одном градусе содержится 60 угловых минут ($1^\circ = 60'$), а в одной угловой минуте содержится 60 угловых секунд ($1' = 60''$). Скорость света 300 тысяч км/с. Сколько астрономических единиц содержится в одном парсеке? За сколько лет свет преодолеет расстояние в 1 парсек?

Отношение длины окружности к её диаметру равно $\pi = 3{,}14$.

Задача 4. На стадионе

Экспериментатор Глюк пробегает по стадиону один круг за $\tau_Г = 20$ с. Если Глюк и его друг, теоретик Баг, стартуют с одного места и побегут по дорожке стадиона в разные стороны, то они встретятся через $\tau_0 = 12$ с. За какое время $\tau_Б$ Баг пробежит один круг?

Критерии оценивания

Записано выражение для ЭДС самоиндукции катушки 1
Получена связь $\mathscr{E}_L$ и $\mathscr{E}$ 1
Найдена зависимость $I(t)$ 2
Найдена работа батареи за промежуток времени Δt 3
Найдена полная работа 3

Задача 5. Оптическая схема

Построим изображение S_1 источника S в зеркале M_1 (это делается по стандартной методике). Теперь, при рассмотрении лучей, отраженных зеркалом M_1, можно отвлечься от источника S и зеркала M_1 и считать, что эти лучи исходят из мнимого источника S_1.

Аналогичным образом построим S_{12} — мнимое изображение мнимого источника S_1 в зеркале M_2 и, далее, S_{123} — изображение S_{12} в M_3 (рис. 18).

Соединив S_{123} с точкой O, найдём точку K, в которой луч отразился от M_3 и участок KO траектории луча.

Аналогично, соединяем S_{12} с K и находим точку L, в которой луч отразился от M_2, и участок LK траектории луча.

Далее, соединяем S_1 с L и находим точку N. Мы восстановили следующий участок хода луча NL. Наконец, соединяя S с N, завершаем построение. $SNLKO$ — искомая траектория луча.

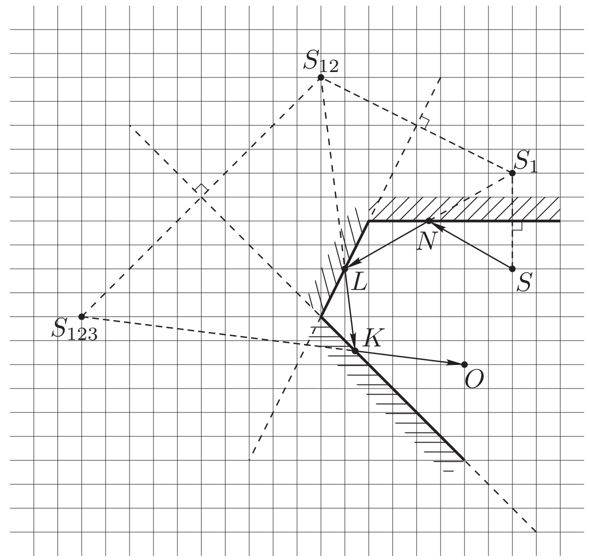


Рис. 18

Время скатывания с горки $t = L/v_{\text{ср}}$, где $v_{\text{ср}} = (v_0 + v_{\text{к}})/2$ — средняя скорость при спуске с горки. Тогда:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{L_2}{v_{\text{ср}}}\frac{v_{\text{ср}}}{L_1} = \frac{3L}{L} = 3.$$

Таким образом, во втором случае время скатывания в три раза больше.

Критерии оценивания

Получено выражение для t_1 4
Получено выражение для t_2 4
Проведено сравнение t_2 и t_1 2

Задача 4. Электрическая цепь

ЭДС самоиндукции катушки:

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где ΔI — изменение силы тока за промежуток времени Δt.

Вследствие того, что в цепи отсутствует активное сопротивление:

$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_L = 0.$$

Тогда:

$$\Delta I = \frac{\mathscr{E}}{L}\Delta t.$$

Суммируя по всем промежуткам времени Δt, получим зависимость силы тока в цепи от времени:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{L}t,$$

где время t отсчитывается от момента замыкания ключа.

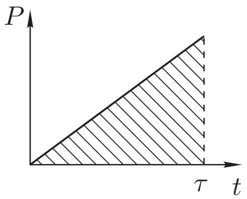


Рис. 17

Работа батареи за промежуток времени Δt:

$$\Delta A = \mathscr{E}\Delta q = EI\Delta t = \frac{\mathscr{E}^2}{L}t\Delta t,$$

где Δq — заряд, прошедший через батарею. Построим график мощности $P = \Delta A/\Delta t$ от времени (рис. 17). Искомая работа найдётся как площадь под этим графиком:

$$A = \frac{1}{2}\tau\frac{\mathscr{E}^2\tau}{L} = \frac{\mathscr{E}^2\tau^2}{2L}.$$

9 класс

Задача 1. Громкие гонщики

Два гоночных автомобиля мчатся навстречу друг другу с одинаковой скоростью. Один из водителей начинает подавать звуковые сигналы длительностью τ_1, при этом другой водитель определил их длительностью $\tau_2 = 0{,}8\tau_1$.

Скорость звука c в воздухе постоянна и равна 333 м/с. С какой скоростью едут автомобили?

Задача 2. Джеймс Бонд

Джеймс Бонд плывёт на надувной лодке. Его преследуют международные террористы. На выручку Бонду летит самолёт со скоростью $v = 360$ км/ч (рис. 3). Джеймс Бонд выпускает вверх воздушный шар, удерживая его за длинную лёгкую верёвку. Самолёт подцепляет шар, а с ним и Джеймса. Какую перегрузку испытает Бонд в этот момент, если длина выпущенной части верёвки равна $L = 200$ м? Не повредит ли этот трюк его здоровью?

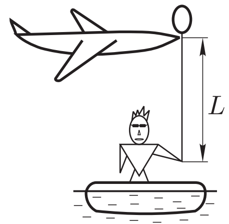


Рис. 3

Примечание.

1. Перегрузка определяется как $k = (P - P_0)/P_0$, где P — вес тела, P_0 — вес тела в нормальном состоянии, то есть когда тело покоится на земле.

2. Для тренированных людей предельная перегрузка не должна превышать 6.

Задача 3. Житель девятого этажа

Житель девятого этажа вышел из своей квартиры в тот момент, когда лифт начал движение со второго этажа вверх. Не желая терять времени, житель начал спускаться пешком со скоростью 6 этажей в минуту. Оказавшись на пятом этаже, он услышал, что лифт освободился на одном из верхних этажей, и решил вызвать его и продолжить путь вниз на лифте. Ожидание лифта на пятом этаже заняло у жителя девятого этажа 28 сек. Разумно ли он поступил с точки зрения экономии времени, решив поехать с пятого этажа вниз на лифте, а не продолжив путь вниз пешком? Сколько времени он выиграл или проиграл? Считайте, что лифт движется равномерно, а временем остановки лифта и открывания дверей можно пренебречь. Скорости спуска и подъёма лифта одинаковы по абсолютной величине.

Задача 4. Морозильная камера

Экспериментатор Глюк перелил в чашу, находящуюся в морозильной камере, 1 литр воды. Для того, чтобы охладить содержимое чаши на $\Delta t = 18$ °C, потребовалось отобрать от него $q = 403 \cdot 10^3$ Дж теплоты. Какой при этом стала температура содержимого чаши в морозильной камере? Известны следующие удельные характеристики: теплоёмкость воды $c_\text{в} = 4{,}20\cdot$ кДж/(кг $\cdot$ °C), теплоёмкость льда $c_\text{л} = 2{,}10\cdot$ кДж/(кг $\cdot$ °C), а теплота плавления льда равна $\lambda = 340\cdot$ кДж/кг.

Задача 5. Электрическая схема

На каком из резисторов электрической цепи (рис. 4) выделяется наибольшая мощность? Сопротивления резисторов равны $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм.

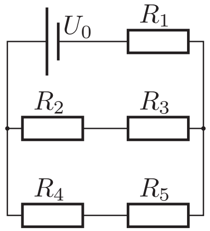


Рис. 4

Записано условие (18) 1
Найдено давление p_1 1
Записано условие (19) 2
Построен график $M(T_0/T_1)$ 2
Найден коэффициент k 1
Определён коэффициент трения μ 1

Задача 2. Линейный процесс

По условию, давление пропорционально объёму. Пусть $\alpha = p/V$. Пусть $V = V_1$. Запишем уравнения состояния для точек 1, 2, 3:

$$\alpha V^2 = \nu R T_1, \tag{23}$$

$$\alpha (V + \Delta V)^2 = \nu R T_2, \tag{24}$$

$$\alpha (V + 2\Delta V)^2 = \nu R T_3. \tag{25}$$

Поделив (24) и (25) на (23), получим:

$$\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^2 = \frac{T_2}{T_1}, \tag{26}$$

$$\left(1 + \frac{2\Delta V}{V}\right)^2 = \frac{T_3}{T_1}. \tag{27}$$

Из (26) получим:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1. \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), найдём T_3:

$$T_3 = T_1 \left(2\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1\right)^2 = \left(2\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2.$$

Критерии оценивания

Записано, что $p = \alpha V$ 1
Записаны уравнения Менделеева-Клапейрона для состояний (1),(2),(3) 2
Отношение T_2/T_1 выражено через $\Delta V/V$ 2
Отношение T_3/T_1 или T_3/T_2 выражено через $\Delta V/V$ 2
T_3 выражено через T_1 и T_2 3

Задача 3. Горка

Так как трения нет, то согласно закону сохранения механической энергии в обоих случаях скорость бруска у основания горки будет одной и той же. Обозначим её $v_\text{к}$.

$$= \mu RK(H - L) + \mu p_0 \pi R^3 - \mu p_0 \pi R^3 \frac{T_0}{T_1}. \qquad (21)$$

Видно, что зависимость M от (T_0/T_1) представляет собой линейную функцию. Определив с помощью графика угловой коэффициент $\mu p_0 \pi R^3$ этой функции, вычислим значение коэффициента трения. Точка пересечения продолжения графика с осью M_0 соответствует величине:

$$\mu RK(H - L) + \mu p_0 \pi R^3, \qquad (22),$$

откуда находим коэффициент жёсткости пружины.

Экспериментальная зависимость $M(T_0/T_1)$ представлена на (рис. 16). Через полученные точки с учётом погрешности измерений можно провести прямые 1 и 2 с минимально возможным и максимально возможным наклоном, соответственно. Для прямой 1 получаем минимальное значение $\mu = 0{,}18$. Для прямой 2 максимальное значение $\mu = 0{,}20$. Из полученных результатов можно сделать вывод:

$$\mu = 0{,}19 \pm 0{,}1.$$

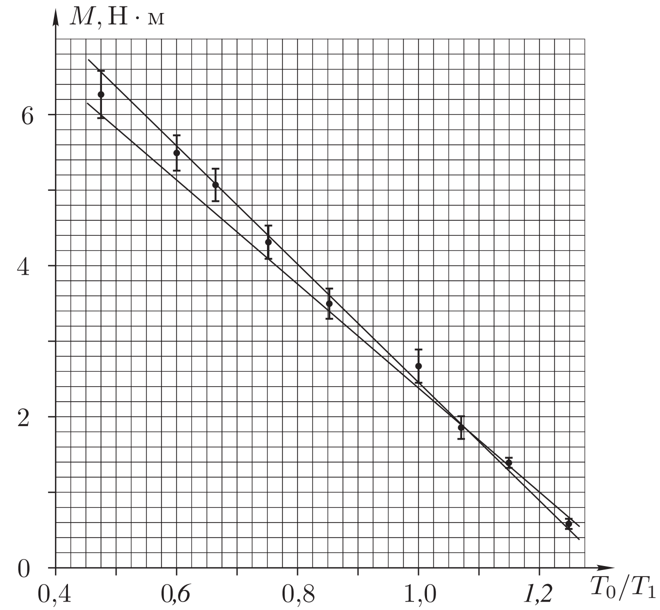


Рис. 16

Критерии оценивания

Найдена реакция N опоры 1
Записано неравенство для моментов сил 1

10 класс

Задача 1. Цилиндрический сосуд I

Цилиндрический сосуд с внешним радиусом $R = 5$ см и высотой стенок $H = 30$ см закрыт очень лёгкой и прочной цилиндрической крышкой такого же радиуса. Крышка плотно прижата к торцу стенки сосуда растянутой пружиной, закреплённой в центрах крышки и дна сосуда (рис. 5). Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $L = 10$ см. Если перед закрытием цилиндра температура воздуха в нём равнялась температуре окружающей среды $t_0 = 27$ °C, то для поворачивания на малый угол крышки закрытого сосуда к ней необходимо приложить силы, суммарный момент которых относительно оси цилиндра больше $M_0 = 2{,}5$ Н·м. Если же предварительно воздух в сосуде охладить до температуры ниже $t_1 = -46$ °C, затем закрыть сосуд той же крышкой с пружиной и дождаться установления теплового равновесия воздуха в нём с окружающей средой, то окажется, что крышку можно повернуть на малый угол относительно сосуда, приложив к ней любой отличный от нуля момент силы. Чему равен коэффициент трения μ между крышкой и сосудом? Чему равен коэффициент жёсткости пружины k? Векторы прикладываемых к крышке сил параллельны плоскости крышки. Толщина стенок сосуда много меньше его радиуса. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Задача 2. Неизвестные массы

На горизонтальной поверхности стола покоится груз I. Он связан с грузом II нитью, перекинутой через лёгкий блок. Если на груз I подействовать силой F_1, направленной вдоль нити (рис. 6), то он станет двигаться влево с ускорением, увлекая за собой висящий на нити груз II. Если на груз II подействовать силой F_2, направленной вниз, то он станет опускаться с таким же по модулю ускорением, увлекая за собой груз I (рис. 7). Между грузом I и поверхностью стола действует сила трения. Вычислите массу m_2 груза II.

Ускорение свободного падения равно g. Силы F_1 и F_2 известны.

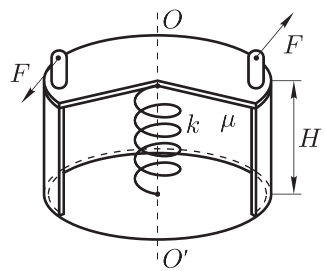


Рис. 5

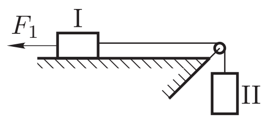


Рис. 6

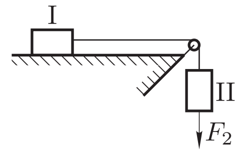


Рис. 7

Задача 3. Плотность жидкостей

Таблица 1

V, л	ρ, кг/м^3
0,2	1130
0,4	1050
0,6	1000
0,8	980
1,0	960

Однажды экспериментатора Глюка попросили определить плотности ρ_1 и ρ_2 двух неизвестных жидкостей, по 1 литру которых находилось в двух больших мерных цилиндрах. Непосредственное измерение оказалось невозможным, так как высота столба жидкостей в цилиндрах была недостаточной для использования имеющегося ареометра. Другой лабораторной посуды, устройств или измерительных приборов в распоряжении экспериментатора не оказалось. Для решения задачи Глюк начал добавлять по 200 мл жидкости из первого цилиндра во второй и измерять плотность получавшейся смеси (при этом глубина слоя жидкости была уже достаточной для использования ареометра). Результаты измерений представлены в таблице 1. В ней через V обозначен суммарный объём перелитой жидкости, а через ρ — плотность получившейся смеси. Путём графической обработки полученных данных Глюк определил плотности ρ_1 и ρ_2 обеих жидкостей. Какие значения плотностей он получил? Для ответа на этот вопрос постройте график измеренной зависимости, откладывая по осям координат такие физические величины, для которых эта зависимость является линейной функцией, а её график представляет собой прямую линию.

В данном эксперименте плотность жидкости измерялась с точностью 2%. Погрешностью измерения объёма можно пренебречь. Объём смеси равнялся сумме объёмов смешиваемых жидкостей.

Задача 4. Электрическая цепь

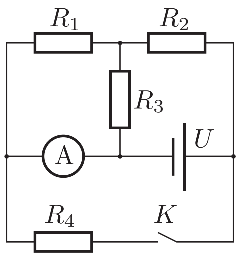


Рис. 8

В электрической цепи, изображённой на рисунке 8, $U = 4{,}2$ В, $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = R_3 = 4$ кОм, $R_4 = 6$ кОм. Найдите силу тока $I_{\text{A}1}$, текущего через амперметр при разомкнутом ключе K, и $I_{\text{A}2}$, при замкнутом ключе K. Амперметр считайте идеальным.

Задача 5. Странный четырёхугольник

Четырёхугольник $ABCD$ вырезан из однородной пластины таким образом, что $AB = AD$, $CB = CD = 5$ см, длина диагонали $BD = 8$ см. Вычислите длину диагонали AC, если известно, что центр масс четырёхугольника совпадает с вершиной C.

Примечание. Центр масс однородного треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

11 класс

Задача 1. Цилиндрический сосуд II

Рассмотрим силы, действующие на крышку. Вниз на неё действует сила атмосферного давления p_0S и сила упругости пружины (по условию пружина растянута): $F_{\text{пр}} = k(H - L)$, где S — площадь крышки ($S = \pi R^2$). Вверх на крышку действует сила упругости N со стороны стенок сосуда и сила давления воздуха, находящегося внутри сосуда, которая равна p_1S. По условию задачи толщина стенок сосуда много меньше его радиуса, поэтому разницей площадей внутренней и внешней стороны крышки пренебрежем).

Из условия неподвижности крышки в вертикальном направлении следует равенство нулю суммы проекций сил на это направление:

$$N + p_1S - p_0S - K(H - L) = 0.$$

Отсюда

$$N = K(H - L) + (p_0 - p_1)S.$$

При поворачивании закрытой крышки вокруг оси сосуда между крышкой и торцом стенки сосуда действует сила трения скольжения, равная $F_{\text{тр}} = \mu N$. По условию задачи стенки сосуда тонкие, поэтому можно считать, что момент силы трения относительно оси сосуда равен $\text{M}_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R = \mu NR$. Для поворачивания крышки момент внешней силы должен превысить момент силы трения скольжения. Отсюда в предельном случае имеем равенство:

$$\text{M} = \mu R(K(H - L) + (p_0 - p_1)S), \qquad (20)$$

Определим, как зависит давление p_1 от температуры T_1. По закону Менделеева–Клапейрона для порции воздуха в открытом охлаждённом сосуде:

$$p_0V = \nu R\text{T}_1,$$

где V — объём сосуда, ν — количество молей воздуха в нём. Для той же порции газа в закрытом, нагретом до T_0 сосуде:

$$p_1V = \nu R\text{T}_0.$$

Следовательно,

$$p_1 = p_0(\text{T}_0/\text{T}1),$$

и условие (20) приобретает вид:

$$\text{M} = \mu R\left[K(H - L) + p_0\left(1 - \frac{\text{T}_0}{\text{T}_1}\right)S\right] =$$

Заметим, что при замкнутом ключе резистор R_4 параллелен всей остальной схеме (схеме, рассматривавшейся в первом пункте), тогда:

$$I_{A2} = I_{A1} + U/R_4 = 1\ \text{мА},$$

так как ток, текущий через амперметр, теперь складывается из токов, текущих по резисторам R_1 и R_4.

Критерии оценивания

Подмечено, что при идеальном амперметре сопротивления R_1 и R_2 включены в цепь параллельно 2
Найдено полное сопротивление цепи в первом случае 2
Определена сила тока, текущего через батарею в первом случае 2
Найдена сила тока I_{A_1} 2
Найдена сила тока I_{A_2} 2

Задача 5. Странный четырёхугольник

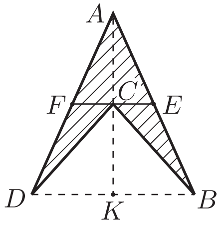


Рис. 15

Центр масс может совпадать с вершиной только в том случае, когда четырёхугольник вогнутый (рис. 15). Пусть CE — медиана треугольника ABC, CF — медиана треугольника ACD.

Соединим точки F и E прямой. Центр масс лежит в её середине и совпадает с точкой C. Следовательно FE — средняя линия треугольника DAB, а это значит, что $AC = CK$. В треугольнике DAB проведём медиану AK. Так как треугольник DCB — равнобедренный, CK является медианой и высотой одновременно. Следовательно:

$$AC = CK = \sqrt{(CB)^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)} = 3\ \text{см}.$$

Критерии оценивания

Идея о том, что четырёхугольник вогнутый 3
Идея о том, что $AC = CK$ 4
Вычисление длины диагонали AC 3

11 класс

Задача 1. Цилиндрический сосуд II

Цилиндрический сосуд с внешним радиусом $R = 5$ см и высотой стенок $H = 30$ см закрыт очень лёгкой и прочной цилиндрической крышкой такого же радиуса. Крышка плотно прижата к торцу стенки сосуда растянутой пружиной, закреплённой в центрах крышки и дна сосуда (рис. 9). Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $L = 10$ см. Если задать температуру T_1 воздуха в сосуде, затем закрыть крышку и дождаться установления теплового равновесия воздуха в сосуде с окружающей средой, температура которой равна $T_0 = 300$ К, то для поворачивания крышки закрытого сосуда на малый угол относительно оси сосуда к ней необходимо приложить силы, суммарный момент которых равен M. Экспериментальная зависимость M от T_1 с указанием погрешности измерения M представлена в таблице 2.

Таблица 2

№	T_1, К	M, Н · м	$\Delta M/M$, %
1	240	0,58	10
2	260	1,38	10
3	280	1,85	10
4	300	2,66	10
5	350	3,48	5
6	400	4,31	5
7	450	5,06	5
8	500	5,50	5
9	600	6,25	5

Постройте график зависимости M от отношения T_0/T_1. Определите с его помощью коэффициент жёсткости пружины k и коэффициент трения μ между крышкой сосуда и торцом его стенки. Оцените погрешность определения указанных величин.

Векторы прикладываемых к крышке сил параллельны плоскости крышки. Толщина стенок сосуда много меньше его радиуса. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Задача 2. Линейный процесс

На pV–диаграмме точки 1, 2, 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (рис. 10). Известно, что при переходе из состояния 1 в состояние 2 и из 2 в 3 объём меняется на одну и ту же величину. Найдите температуру T_3 в состоянии 3, если в состояниях 1 и 2 температуры соответственно равны T_1 и T_2.

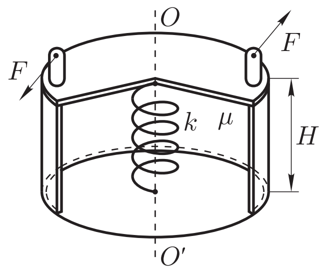


Рис. 9

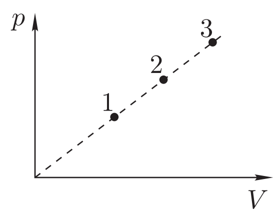


Рис. 10

Задача 3. Горка

С вершины гладкой горки вдоль наклонной плоскости длиной L толкнули со скоростью v_0 брусок (рис. 11). Через некоторое время t_1 он достиг основания горки. Затем тот же брусок пустили со скоростью v_0 вдоль наклонной плоскости длиной $3L$, и он скатился за время t_2.

Во сколько раз время t_2 скатывания с этой горки больше времени t_1?

Задача 4. Электрическая цепь

Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных батарейки с ЭДС $\mathscr{E}$, катушки индуктивностью L и ключа K (рис. 12). Ключ замыкают и через время τ размыкают. Какую работу совершит батарея за время τ?

Считайте все элементы цепи идеальными.

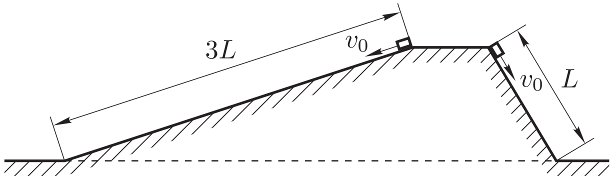


Рис. 11

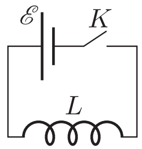


Рис. 12

Задача 5. Оптическая схема

Луч, испущенный точечным источником света S, последовательно отражается от зеркал M_1, M_2 и M_3, после чего проходит через точку O (рис. 13). Опишите, как можно восстановить ход луча при помощи циркуля и линейки без делений.

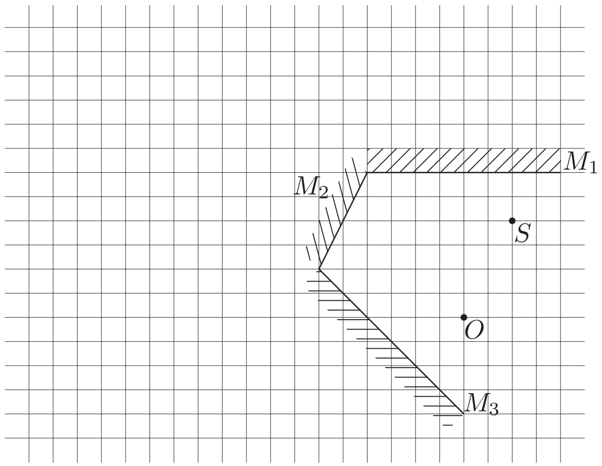


Рис. 13

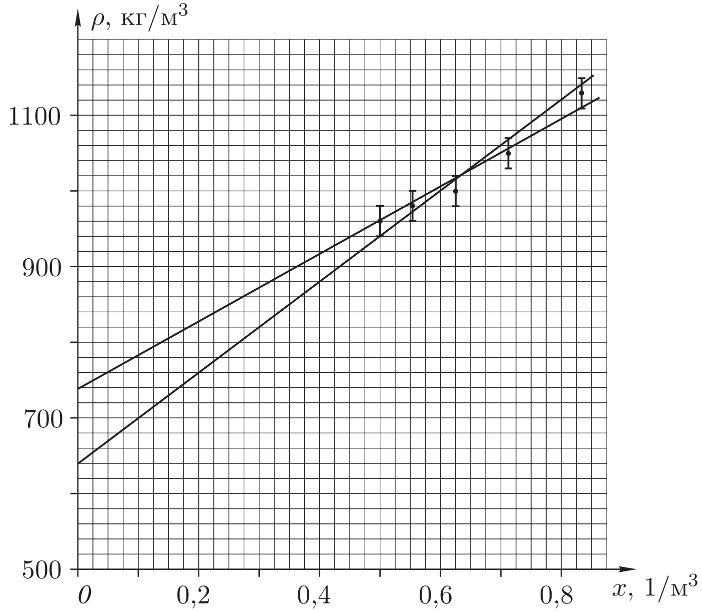


Рис. 14

Критерии оценивания

Записано выражение $\rho(V)$ 2

$\rho(V)$ преобразовано к $\rho \sim A + Bx$ 2

Построен график $\rho(x)$ 3

Найдена плотность ρ_1 1

Определён угловой коэффициент k 1

Найдена плотность ρ_2 1

Задача 4. Электрическая цепь

Амперметр идеален, поэтому резисторы R_1 и R_3 параллельны. Их эквивалентное сопротивление:

$$R_э = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Тогда полное сопротивление:

$$R = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

При разомкнутом ключе сила тока, текущего через амперметр, равна силе тока, текущего через резистор R_1. Так как R_1 и R_3 параллельны, то силы тока в них обратно пропорциональны значениям сопротивлений. Тогда получаем:

$$I_{A1} = \frac{U}{R_2 + R_э} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 0{,}3 \text{ мА}.$$

где μN — сила трения скольжения.

$$m_2a = T - m_2g. \tag{16}$$

Во втором случае:

$$m_2a = m_2g + F_2 - T, \tag{17}$$

$$m_1a = T - \mu N. \tag{18}$$

Решая совместно систему уравнений (15)–(18), получим:

$$m_2 = \frac{F_1 - F_2}{2g}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение движения первого бруска в первом случае 2
Записано уравнение движения второго бруска в первом случае 2
Записано уравнение движения первого бруска во втором случае 2
Записано уравнение движения второго бруска во втором случае 2
Получен ответ 2

Задача 3. Плотность жидкостей

Обозначим через $V_0 = 1$ л исходный объём жидкости во втором цилиндре, V — объём жидкости, добавленной из первого цилиндра во второй. Тогда плотность смеси во втором цилиндре:

$$\rho = \frac{\rho_1 V + \rho_2 V_0}{V + V_0}. \tag{19}$$

Преобразуем (19). Для этого добавим и отнимем в числителе $\rho_1 V_0$:

$$\rho = \frac{(\rho_1 V + \rho_1 V_0) - \rho_1 V_0 + \rho_2 V_0}{V + V_0} = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\frac{V_0}{V + V_0}.$$

Введём новую переменную $x = V_0/(V + V_0)$. Тогда $\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)x$. Построим график функции $\rho = \rho(x)$ (рис. 14). Он линеен. При $x = 0$ плотность $\rho = \rho_1$, а угловой коэффициент графика $k = \Delta\rho/\Delta x = \rho_2 - \rho_1$. Отсюда находим:

$$\rho_2 = k + \rho_1.$$

Численно:

$$\rho_1 = (725 \pm 25)\,\text{кг/м}^3, \quad \rho_2 = (1220 \pm 70)\,\text{кг/м}^3.$$

Возможные решения

7 класс

Задача 1. Баррель и галлон

Плотность нефти $\rho_\text{н} = 698$ кг/м^3 = 0,698 кг/л. Объём 1 барреля:

$$V_\text{б} = \frac{m}{\rho_\text{н}} = \frac{111\ \text{кг}}{0{,}698\ \text{кг/л}} = 159\ \text{л}.$$

Значит, объём барреля больше объёма галлона в

$$\frac{V_\text{б}}{V_\text{г}} = \frac{159\ \text{л}}{3{,}79\ \text{л}} \approx 42\ \text{раза}.$$

Критерии оценивания

Плотность переведена в кг/л или объём в м^3 2
Найден объём 1 барреля 4
Найдено отношение $V_\text{б}/V_\text{г}$ 4

Задача 2. Червяк и улитка

Условие одновременного прихода к финишу записывается следующим образом:

$$\frac{L}{v_\text{у}} = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L - L_1}{v_2},$$

откуда:

$$\frac{L}{36} = \frac{L_1}{30} + \frac{L - L_1}{45}.$$

Решая это уравнение, найдём:

$$L = 2L_1 = 8\ \text{дюймов}.$$

Критерии оценивания

Найдено время движения улитки 2
Найдено время движения червяка 4
Установлена связь между L_1 и L_2 3
Получен правильный числовой ответ 1

Задача 3. Пластилиновый куб

Объём нового куба:

$$V_1 = L_1^3 = 1728\ \text{см}^3.$$

Объём деревянного куба:

$$V_0 = L_0^3 = 1000\ \text{см}^3.$$

Объём пластилина:

$$V_п = V_1 - V_0 = 728 \text{ см}^3.$$

Плотность пластилина $\rho = 1370$ кг/м^3 = 1,37 г/см^3. Масса пластилина:

$$m = \rho V_п \approx 1000 \text{ г} = 1 \text{ кг}.$$

Критерии оценивания

Вычислен объём деревянного куба 2
Вычислен объём нового куба 2
Найдён объём пластилина 2
Выполнено преобразование единиц измерения ρ или V 2
Вычислена масса пластилина 2

Задача 4. Плохой термометр

Отрыв небольшого объёма ртути в капилляре приводит к тому, что показания термометра (отсчитываемые по границе основной массы ртути) просто сдвигаются на 1 °C в область более низких температур. При повышении температуры оторвавшийся столбик ртути покоится до тех пор, пока разрыв не исчезнет. Следовательно, искомая температура равна 39,5 °C.

Соответственно, температура экспериментатора Глюка 37 °C.

Критерии оценивания

Определена температура экспериментатора Глюка (с обоснованием) 5
Определена температура, при которой исчезнет разрыв (с обоснованием) ... 5

сил будет равен нулю, так как исчезает сила N и, соответственно, становится равным нулю момент силы трения.

Определим, как зависит давление p_1 от температуры T_1. По закону Менделеева–Клапейрона для порции воздуха в открытом охлажденном сосуде:

$$p_0 V = \nu R T_1,$$

где V — объём сосуда, ν — количество молей воздуха в нём. Для той же порции газа в закрытом, нагретом до T_0 сосуде:

$$p_1 V = \nu R T_0.$$

Следовательно,

$$p_1 = p_0 \frac{T_0}{T_1}.$$

Таким образом, условие (12) для второго случая примет вид (мы рассмотрим предельный случай):

$$\mu R \left[k(H - L) + P_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) S \right] = 0. \tag{14}$$

Из (14) находим:

$$k = p_0 \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) \frac{\pi R^2}{H - L}.$$

Подставляя численные значения, найдём $k = 1263$ Н/м. Из условия (13) определяим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{M_0}{Rk(H - L)} = 0{,}2.$$

Критерии оценивания

Найдена реакция N опоры 2
Записано неравенство для моментов сил 1
Записано условие (13) 1
Определено давление p_1 2
Записано условие (14) 2
Найден коэффициент k 1
Определён коэффициент трения μ 1

Задача 2. Неизвестные массы

Пусть сила натяжения нити равна T. Запишем второй закон Ньютона применительно к грузу массы m_1 в проекции на ось Ox и к грузу m_2 в проекции на ось Oy:

$$m_1 a = F_1 - \mu N - T, \tag{15}$$

10 класс

Задача 1. Цилиндрический сосуд I

Рассмотрим силы, действующие на крышку. Вниз на неё действует сила атмосферного давления p_0S и сила упругости пружины (по условию пружина растянута): $F_{\text{пр}} = k(H - L)$, где S — площадь крышки ($S = \pi R^2$). Вверх на крышку действует сила упругости N со стороны стенок сосуда и сила давления воздуха, находящегося внутри сосуда, которая равна p_1S. По условию задачи толщина стенок сосуда много меньше его радиуса, поэтому разницей площадей внутренней и внешней стороны крышки пренебрежём. Из условия неподвижности крышки в вертикальном направлении следует равенство нулю суммы проекций сил на это направление:

$$N + p_1S – p_0S - k(H - L) = 0.$$

Отсюда:

$$N = k(H - L) + (p_0 - p_1)S.$$

При поворачивании закрытой крышки вокруг оси сосуда между крышкой и торцом стенки сосуда будет действовать сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Так как по условию задачи стенки сосуда тонкие, можно считать, что момент силы трения относительно оси сосуда равен:

$$M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R = \mu NR.$$

Для поворачивания крышки момент внешней силы должен превысить момент силы трения скольжения. Отсюда:

$$M_0 > \mu R(k(H - L) + (p_0 - p_1)S), \tag{12}$$

По условию задачи в первом случае (когда температура воздуха внутри сосуда перед закрытием равнялась температуре окружающей среды T_0) давление воздуха внутри и снаружи сосуда одинаково и равно атмосферному давлению, то есть $(p_0 - p_1) = 0$. Условие (12) принимает вид (запишем его в предельном случае в виде равенства):

$$M_0 = \mu R(k(H - L)). \tag{13}$$

Во втором случае, когда открытый сосуд предварительно охладили до температуры T_1, давление воздуха в нём осталось равным атмосферному. После закрытия крышки и повышения температуры в сосуде до T_0, давление воздуха в нём возросло и стало достаточным для того, чтобы его сила сравнялась с суммой сил упругости пружины и силы внешнего давления на крышку. Именно в этом случае необходимый для поворачивания крышки момент внешних

8 класс

Задача 1. Домино

Давление, создаваемое игральной костью, связано с массой кости формулой:

$$pS = mg,$$

где $S = a \times b$. Отсюда:

$$m = \frac{pab}{g}.$$

Численно $m = 14{,}7$ г.

Критерии оценивания

Показана связь массы и давления 4
Посчитана площадь S 1
Приведено выражение для массы 3
Дан числовой ответ 2

Задача 2. Брусочки

Пусть общая толщина брусков H, а S — площадь горизонтального сечения брусков. Силы Архимеда, действующие на систему до и после удаления части верхнего бруска, обозначим соответственно F_{A1} и F_{A2}, а общую массу системы — соответственно m_1 и m_2.

Бруски находятся в равновесии, когда

$$F_{A1} = m_1g \quad \text{и} \quad F_{A2} = m_2g,$$

где

$$F_{A1} = \rho_0gS(H - h_0), \quad F_{A2} = \rho_0gS(H - 2h_0),$$

$$m_1 = S(\rho_1h_1 + \rho_2(H - h_1)), \quad m_2 = S(\rho_1h_1 + \rho_2(H - h_0 - h_1)).$$

Решим полученную систему уравнений:

$$\rho_0gS(H - h_0) = gS(\rho_1h_1 + \rho_2(H - h_1)), \tag{1}$$

$$\rho_0gS(H - 2h_0) = gS(\rho_1h_1 + \rho_2(H - h_0 - h_1)). \tag{2}$$

Вычитая из первого уравнения второе и сокращая на gSh_0, получим:

$$\rho_0 = \rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

Отметим, что к этому соотношению можно было прийти и без использования выкладок. Мысленно поменяем бруски местами. Равновесие (если не принимать во внимание устойчивость) не изменится, так как при расчете сил Архимеда и сил тяжести важны лишь объёмы погруженных частей тел и их полные объемы. Известно, что если от полученной системы отделить часть нижнего (после мысленного переворачивания) бруска плотности ρ_2, то это никак не скажется на поведении оставшейся части конструкции. А это возможно только когда отделённая часть находится в воде в состоянии безразличного равновесия, что соответствует равенству плотностей нижнего бруска и воды ($\rho_0 = \rho_2$).

Теперь найдём h_1 из уравнения (1) или (2):

$$h_1 = \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_2} h_0 = 40 \text{ мм}.$$

Критерии оценивания

Записаны условия равновесия 4
Выведено соотношение $\rho_0 = \rho_2$ 3
Получена формула для h_1 2
Найден численный ответ для h_1 1

Задача 3. Парсек

Пусть L — расстояние в 1 парсек. Тогда по определению:

$$L = R_3 \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206 \cdot 10^3 R_3 = 206 \cdot 10^3 \text{ а.е.}$$

В километрах:

$$L = 206 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ км} = 30{,}9 \cdot 10^{12} \text{ км}.$$

Время, затрачиваемое светом на прохождение расстояния в 1 парсек:

$$t = \frac{L}{c} = 10{,}3 \cdot 10^7 \text{ с}.$$

В году содержится $3{,}15 \cdot 10^7$ с, откуда $t \approx 3{,}3$ года.

Критерии оценивания

Парсек выражен в а.е. 3
Парсек выражен в м или км 2
Найдено время t для света (вакуума) 2
Подсчитано, сколько в году секунд 2
Время t выражено в годах 1

Задача 4. На стадионе

Пусть скорость Глюка равна v_Γ, а длина одного круга — L. По условию:

$$v_\Gamma \tau_\Gamma = L. \tag{3}$$

При беге навстречу:

$$(v_\Gamma + v_Б)\tau_0 = L. \tag{4}$$

Сила тока, проходящего через батарею:

$$I_{общ} = \frac{U_0}{R_{общ}} = U_0 \cdot \frac{14}{59} \text{ мА}.$$

Этот ток распределяется между двумя ветвями обратно пропорционально сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_{23}}{I_{45}} = \frac{R_4 + R_5}{R_2 + R_3} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Тогда:

$$I_{23} = 1{,}8 I_{45}, \quad I_{общ} = I_{23} + I_{45} = 2{,}8\ I_{45}.$$

$$P_1 = I_{общ}^2 R_1 = 7{,}84 I_{45}^2 R_1 = 7{,}84 I_{45}^2,$$

$$P_5 = I_{45}^2 R_5 = 5 I_{45}^2,$$

$$P_3 = (1{,}8 I_{45})^2 R_3 = 9{,}72 I_{45}^2.$$

Видно, что наибольшая мощность выделяется на резисторе R_3.

Критерии оценивания

Пояснено, что $P_3 > P_2$ и $P_5 > P_4$ 1
Найдено $R_{общ}$ 2
Найдено выражение для $I_{общ}$ 1
I_{23} выражен через I_{45} (или наоборот) 2
Получены выражения для:
P_1 1
P_3 1
P_5 1
Дан правильный ответ 1

Задача 4. Морозильная камера

Предположим, что вся вода превратилась в лёд. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_л t_л + \lambda + 2c_л \Delta t_в = Q. \qquad (9)$$

По условию:

$$\Delta t_л + \Delta t_в = \Delta t. \qquad (10)$$

Здесь $\Delta t_в$ и $\Delta t_л$ — изменение температур воды и льда в процессе охлаждения. Также учтено, что $c_в = 2c_л$. Преобразуем уравнение (9):

$$\Delta t_л + 2\Delta t_в = \frac{Q - \lambda}{c_л}. \qquad (11)$$

Для удобства введём обозначение:

$$T = \frac{Q - \lambda}{c_л}.$$

Численно $T = 30$ °C. Решая систему (10) и (11), получим:

$$\Delta t_л = 2\Delta t - T = 6 \text{ °C}.$$

Следовательно, установившаяся температура льда $t_л = -6$ °C.

Таким образом, наше предположение о превращении воды в лёд оказалось верным.

Критерии оценивания

Записано уравнение теплового баланса 3
Записана связь $\Delta t_л$, $\Delta t_в$ и Δt 2
Решена система уравнений 3
Учтено, что $t_л < 0$ 2

Задача 5. Электрическая схема

Через резисторы R_2 и R_3 течёт один и тот же ток. По закону Джоуля–Ленца $P = I^2R$. Если сила тока, идущего через два резистора, одинакова, то на резисторе с большим сопротивлением выделяется большая мощность, то есть $P_3 > P_2$. Аналогичным образом получим, что $P_5 > P_4$.

Сопротивление двух ветвей (с R_2, R_3 и R_4, R_5) равно:

$$R_{AB} = \frac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{45}{14} \text{ кОм}.$$

Общее сопротивление:

$$R_{общ} = R_1 + R_{AB} = \frac{59}{14} \text{ кОм}.$$

Из (3) и (4) следует:

$$v_Б = v_Г \frac{\tau_Г - \tau_0}{\tau_0}.$$

Отсюда

$$\tau_Б = \frac{L}{v_Б} = \frac{\tau_Г \tau 0}{\tau_Г - \tau_0} = 30 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Получена связь $L(v_Г)$ 2
Получена связь $L(v_Г + v_Б)$ 2
Выражена $v_Б$ через $v_Г$ 2
Получена связь $L(v_Б)$ 2
Найден числовой ответ 2

9 класс

Задача 1. Громкие гонщики

Относительно первого водителя звук распространяется вперёд со скоростью $(c - v)$, где v — скорость автомобиля. Длина цуга звукового сигнала:

$$L = (c - v)\tau_1.$$

Этот сигнал распространяется со скоростью $(c + v)$ относительно второго водителя.

Время регистрации сигнала:

$$\tau_2 = \frac{L}{c + v} = \tau_1 \frac{c - v}{c + v}.$$

Поскольку $\tau_2 = 0{,}8\tau_1$, мы получим:

$$0{,}8\tau_1 = \tau_1 \frac{c - v}{c + v}.$$

Отсюда $v = c/9 = 37$ м/с.

Критерии оценивания

Выражение для относительной скорости в первом случае 2
Длина цуга 1
Выражение для относительной скорости во втором случае 2
Выражение для времени приёма τ_2 2
Скорость v выражена через c 2
Дан числовой ответ 1

Задача 2. Джеймс Бонд

Перейдём в систему отсчёта, связанную с самолётом. В момент времени, когда шар зацепится за самолёт, Джеймс Бонд будет двигаться по дуге окружности радиуса L относительно самолёта, а его центростремительное ускорение будет равно $a = v^2/L$ и направлено вверх. Запишем второй закон Ньютона:

$$ma = P - mg.$$

Отсюда $P = m(a + g) = m(g + v^2/L)$, а $P_0 = mg$. Тогда перегрузка:

$$k = v^2/gL = 5,$$

и, следовательно, здоровье Джеймса останется в сохранности.

Критерии оценивания

Переход в СО самолёта 4
Записан второй закон Ньютона 2

Выражение для перегрузки 2
Числовой ответ 1
Вывод о безопасности Бонда 1

Задача 3. Житель девятого этажа

Пусть скорость лифта n этажей в секунду. Пусть K — номер этажа, на котором освободился лифт. Тогда время движения лифта со второго этажа до K-го и обратно до пятого этажа равно:

$$t = ((K–2) + (\text{K}–5))/n, \tag{5}$$

Это время равно времени спуска жителя девятого этажа на 4 этажа плюс 28 сек ожидания лифта на пятом этаже. По условию скорость спуска жителя девятого этажа равна 0,1 этаж в секунду. Таким образом:

$$t = \frac{4}{0{,}1} + 28 = 68 \text{ секунд.} \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), имеем

$$(2K - 7) = 68n. \tag{7}$$

Кроме того, нам известно, что время спуска лифта с K-го этажа на пятый равно 28 сек.

$$(K–5) = 28n. \tag{8}$$

Решая систему уравнений (7) и (8), находим $K = 12$, $n = 0{,}25$ этажа в секунду. Следовательно, время, необходимое жителю девятого этажа, чтобы спуститься на первый этаж пешком, равно $t_1 = 8/0{,}1 = 80$ сек, а время t_2, которое он потратил на весь спуск, ожидая лифт на пятом этаже, складывается из времени его спуска пешком на пятый этаж, времени ожидания лифта на пятом этаже и времени спуска лифта с пятого на первый этаж:

$$t_2 = \frac{4}{0{,}1} + 28 + \frac{4}{0{,}25} = 40 + 28 + 16 = 84 \text{ сек.}$$

Итак, $t_2 > t_1$ на 4 секунды. Значит, жителю девятого этажа не надо было ждать лифт на пятом этаже. Продолжая спускаться пешком до первого этажа, он вышел бы из дома на 4 секунды раньше!

Критерии оценивания

Найдено время движения лифта до пятого этажа 2
Найдено время спуска жителя до пятого этажа 2
Установлена связь скорости лифта и номера этажа 2
Найдено время спуска лифта до пятого этажа 2
Получен правильный ответ 2