

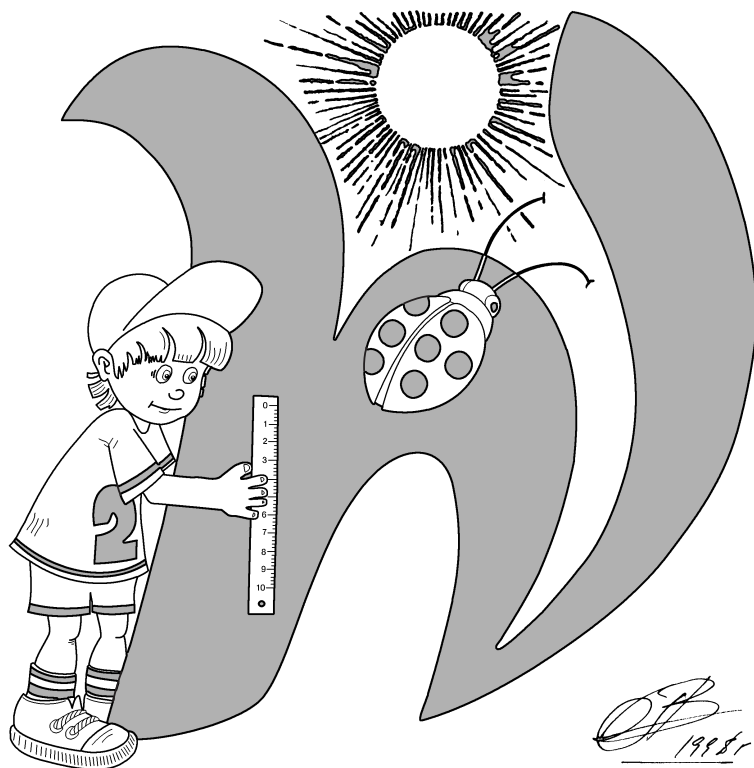
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2001/2002 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: fizolimp@mail.ru (с припиской **antispan** к теме письма)

Авторы задач

- 9 класс
1. Шведов О.
 2. Слободянин В.
 3. Слободянин В.
 4. Слободянин В.

- 10 класс
1. Судаков О.
 2. Шведов О.
 3. Подлесный Д.
 4. Чудновский А.
 5. Шведов О.

- 11 класс
1. Подлесный Д.
 2. Шведов О.
 3. Мельниковский Л.
 4. Слободянин В.
 5. Подлесный Д.

Ответственные за классы

9 класс
Шведов О.

10 класс
Мельниковский Л.

11 класс
Чивилев В.

Общая редакция — Слободянин В.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система \LaTeX 2_ε.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:41.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Груз в воде

Система состоит из легкого неподвижного блока, длинной нерастяжимой нити, груза цилиндрической формы и длинной трубы с поршнем, опущенной в глубокий водоем. Плотность воды ρ_0 , плотность материала груза ρ_1 , высота цилиндра H , площади основания цилиндра и внутреннего сечения трубы одинаковы. Вначале нить удерживают так, что поршень и груз касаются воды, при этом нить натянута (рис. 1). В некоторый момент времени нить отпускают. Определите расстояние h , на которое груз опустится в воду после установления равновесия, в следующих случаях:

1. $\rho_1 = \rho_0$, $H = 1$ м;
2. $\rho_1 = 3\rho_0$, $H = 4$ м;
3. $\rho_1 = 1,5\rho_0$, $H = 16$ м.

Трением в системе пренебречь, нить и поршень считать легкими.

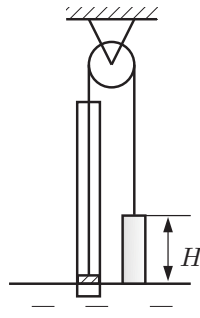


Рис. 1

Задача 2. Муха на пружине

Однородную пружину длины L разрезали на две части, одна из которых имеет длину l_1 . Из получившихся кусков пружины, нерастяжимой нити и подвижного блока собрали систему (рис. 2). На верхний конец пружины длиной l_1 села муха Цокотуха. В некоторый момент времени блок начали поднимать вертикально вверх со скоростью v_0 . С какой скоростью стала подниматься сидящая на конце пружины муха Цокотуха? Трения в блоке нет. Вес нити, пружины и блока можно не учитывать.

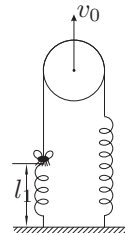


Рис. 2

Задача 3. Потерянный луч

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 3), на котором были изображены тонкая собирающая линза, ее фокусы и ход луча, идущего через линзу. От времени чернила выцвели, и на чертеже от луча остались видны только две точки A и B . Восстановите по этим данным ход луча.

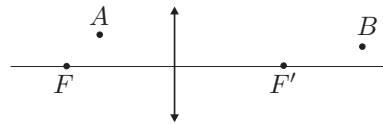


Рис. 3

Задача 4. Запутанная схема

Найдите сопротивление R_{AB} цепи между точками A и B (рис. 4). Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 5$ Ом.

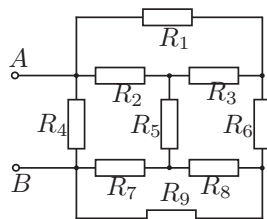


Рис. 4

10 класс

Задача 1. Проводящая сфера

Тонкостенная проводящая сфера, радиус которой равен радиусу Земли R , имеет толщину стенок $h = 1$ мм (рис. 5). Определите сопротивление r сферы между ее полюсами N и S . Удельное сопротивление материала сферы зависит от географической широты φ по закону $\rho(\varphi) = \rho_0 \cos \varphi$, где $\rho_0 = 0,2$ Ом·см.

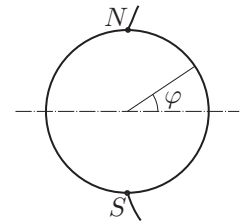


Рис. 5

Задача 2. Хоккеист на карусели

На карусели радиуса $R = 15$ м, вращающейся в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 0,5$ рад/с, на расстоянии $R_0 = 10$ м от центра стоит хоккеист. В некоторый момент времени он ударил клюшкой по шайбе. Шайба после его броска оставила на карусели след (рис. 6). Найдите величину начальной скорости шайбы относительно карусели и относительно Земли. Трением шайбы о карусель пренебречь.

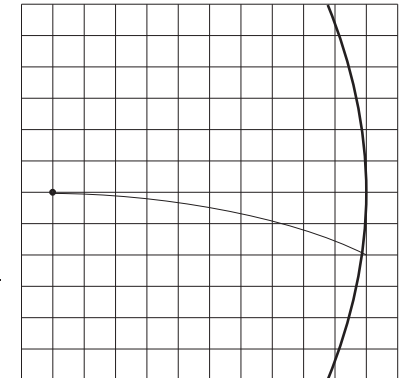


Рис. 6

Примечание. При малых значениях φ (когда угол φ выражен в радианах) можно считать $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$.

Задача 3. Ломаная

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 7). От времени чернила выцвели, и на чертеже остался виден только луч, идущий через тонкую линзу, и две точки A и B пересечения его с передней и задней фокальными плоскостями. При помощи построения восстановите положение линзы и ее фокусы.

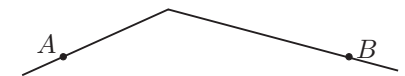


Рис. 7

Задача 4. Химическая реакция

Вещества X , Y и Z могут участвовать в следующей химической реакции: $3X + 2Y \rightarrow Z$. Температуры плавления и кипения этих веществ таковы, что $T_x^{\text{пл}} < T_y^{\text{пл}} < T_z^{\text{пл}} = 10^\circ\text{C}$, $T_x^{\text{кип}} > T_y^{\text{кип}} > T_z^{\text{кип}} = 190^\circ\text{C}$. В первом опыте вещества X и Y , взятые при температуре $T_z^{\text{пл}}$, поместили в герметичный теплоизолированный сосуд. Через некоторое время в сосуде осталось только вещество Z , причем половина его была в твердом состоянии, а половина — в жидком. Во втором опыте вещества X и Y снова поместили в герметичный теплоизолированный сосуд, но на этот раз при температуре $T_z^{\text{кип}}$. Через некоторое время в сосуде осталось только вещество Z , причем одна половина его была в жидком состоянии, а другая — в газообразном. Найдите молярную теплоемкость вещества Z в жидком состоянии. Молярные теплоемкости веществ X и Y в жидком состоянии $C_x = 55$ кДж/(кмоль·К), $C_y = 80$ кДж/(кмоль·К); для вещества Z молярная теплота плавления $\lambda_z = 5$ МДж/кмоль, теплота парообразования $r_z = 40$ МДж/кмоль.

Примечание. Считать, что теплоемкости веществ не зависят от температуры. Давление в сосуде в обоих опытах поддерживалось постоянным и одинаковым.

Задача 5. Емкости

В схеме (рис. 8) заряд конденсатора C известной емкости равен Q_0 . Ключ замкнули. Зависимость от времени заряда Q_1 на конденсаторе C_1 неизвестной емкости изображена на графиках (рис. 9, 10). Найдите емкость конденсатора C_1 и сопротивления резисторов R_1 и R_2 . Время τ известно.

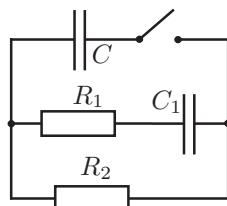


Рис. 8

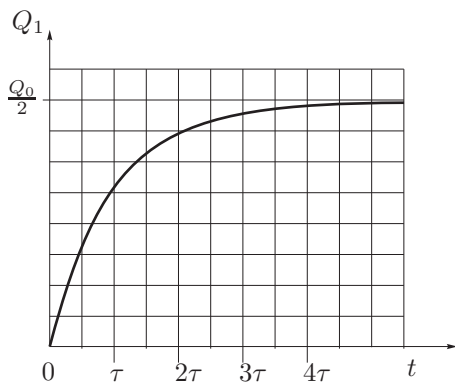


Рис. 9

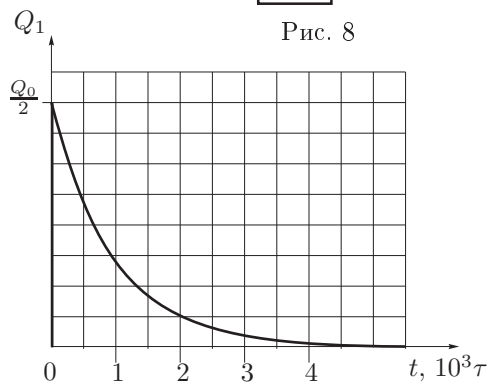


Рис. 10

Задача 1. Катухка

Катухка массой M с намотанной на нее легкой нитью стоит на горизонтальном столе и упирается в два гвоздя, вбитых вертикально в стол. Один конец нити закреплен на катухке, а к свободному концу нити, свешивавшемуся в прорезь стола, привязан груз (рис. 11). При каких значениях массы m груза система будет в равновесии? Радиус барабанов катухки R , радиус намотки нити r . Коэффициент трения катухки о гвозди μ_1 , коэффициент трения катухки о поверхность стола μ_2 .

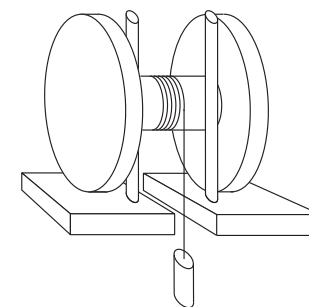


Рис. 11

Задача 2. Сопротивление воздуха

Тело, брошенное с поверхности Земли со скоростью v_0 вертикально вверх, к моменту падения потеряло за счет сопротивления воздуха $\varepsilon = 1\%$ своей кинетической энергии. Сколько процентов кинетической энергии потеряет это же тело, если бросить его вертикально вверх со скоростью $v_0/2$? Сила сопротивления пропорциональна k -й степени скорости тела, где $k > 0$.

Задача 3. Игрушечный поезд

Игрушечный электропоезд массой $m = 500$ г с двигателем постоянного тока питается через рельсы от источника тока с напряжением $U_0 = 5$ В и движется горизонтально. Поезд имел скорость $v_0 = 20$ см/с и разогнался, когда источник отключили, а рельсы замкнули резистором с сопротивлением $R = 50$ Ом. Найдите тормозной путь L поезда, считая, что его колеса не проскальзывают. Сопротивлением обмоток электродвигателя и рельс, трением в подшипниках и другими потерями в двигателе пренебречь. Сопротивление воздуха не учитывать. Масса ротора двигателя и колес много меньше массы поезда.

Задача 4. Три точки

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертеж оптической схемы (рис. 12). От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только 3 точки: оптический центр тонкой линзы O , точка A передней фокальной плоскости и точка B задней фокальной плоскости. Из пояснений к чертежу следовало, что точки A и B лежат на луче, идущем через линзу. Восстановите построением по этим данным ход луча, положение линзы и ее фокусы.

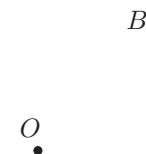


Рис. 12

Задача 5. Циклический процесс

В откачанный цилиндрический сосуд с поршнем впрыснули некоторое количество воды. Содержимое сосуда довели до равновесного состояния с температурой $t_1 = 76^\circ\text{C}$, при этом объем сосуда составил $V_1 = 50$ л. Далее с содержимым сосуда совершают квазистатический круговой цикл, состоящий из:

1. изотермического расширения до объема $V_2 = 3V_1$, в результате которого давление в сосуде уменьшается в два раза;
2. изобарического сжатия до объема $V_3 = \frac{3}{2}V_1$;
3. изотермического сжатия до объема $V_4 = V_1$;
4. изохорического нагревания до начальной температуры.

Принимая во внимание зависимость давления насыщенных паров воды от температуры (рис. 13), найдите: максимальную и минимальную температуры в цикле; массу воды, впрыснутой в сосуд; работу, совершенную системой в цикле.

Примечание. При изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2 идеальный газ совершает работу: $A = \frac{m}{\mu}RT \ln \frac{V_2}{V_1}$, где $\frac{m}{\mu}$ — количество молей газа, T — температура газа, R — универсальная газовая постоянная.

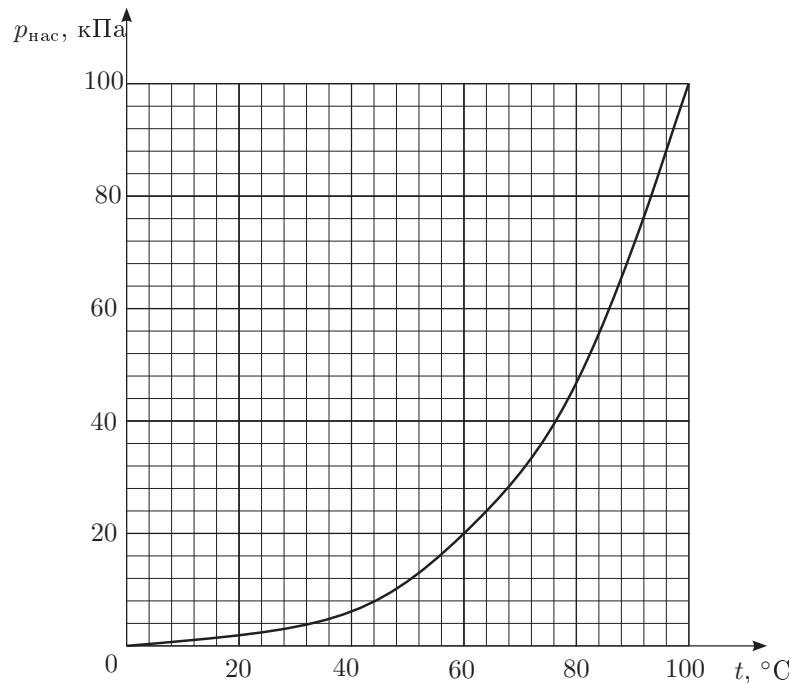


Рис. 13

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Груз в воде

Пусть площадь основания цилиндрического груза и площадь внутреннего сечения трубы равны S . После того как нить отпустят, груз начнет опускаться, а вода — подниматься по трубе за поршнем. Возможны два случая: груз опустится в воду полностью, либо частично. В этих случаях равнодействующая R сил тяжести и Архимеда будет равна

$$R = \rho_1 g S H - \rho_0 g S h \quad \text{при} \quad h \leq H;$$

$$R = (\rho_1 - \rho_0) g S H \quad \text{при} \quad h > H.$$

Сила R должна совпадать с весом жидкости в трубе, поднявшейся за поршнем: $R = \rho_0 g S H$.

В первом случае (при $\rho_1 < 2\rho_0$) $h = H\rho_1/(2\rho_0)$.

Во втором случае (при $\rho_1 > 2\rho_0$) $h = H(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$.

Учитывая первое условие задачи, $h = H\rho_1/(2\rho_0) = 0,5$ м.

Аналогично, при втором условии $h = H(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 = 8$ м.

Применение полученных формул к условию 3 давало бы $h = 12$ м. Однако здесь мы сталкиваемся с эффектом конечности атмосферного давления: при поднятии поршня на высоту более $H_0 = 10$ м вода выше уровня H_0 подниматься не будет.

Если цилиндр опускается в воду на глубину h не полностью, то сила атмосферного давления $p_{\text{атм}}S = \rho_0 g H_0 S$, действующая на поршень, должна уравновешивать силу натяжения нити:

$$\rho_0 g H_0 S = \rho_1 g S H - \rho_0 g S h.$$

Отсюда глубина погружения цилиндра при условии 3

$$h = \frac{\rho_1 H}{\rho_0} - H_0 = 14 \text{ м.}$$

Задача 2. Муха на пружине

Любой кусок пружины можно разбить на некоторое количество маленьких участков длиной Δx , каждый из которых удлиняется на одну и ту же величину, так как пружина однородна. Общее удлинение пропорционально числу участков, которое в свою очередь пропорционально первоначальной длине куска пружины.

Поскольку нить нерастяжима и в блоке нет трения, то оба куска пружины растягиваются одинаковой силой. Пусть Δx_1 и Δx_2 — удлинения кусков пружины, тогда:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{L - l_1}.$$

Пусть Δx_0 — смещение блока, тогда из кинематических соображений $2\Delta x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Исключая Δx_2 из этих двух условий, находим

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} = 2 \frac{l_1}{L}.$$

Движение равномерно, поэтому $\Delta x_1/\Delta x_0 = v_1/v_0$, откуда $v_1 = 2v_0 l_1/L$.

Задача 3. Потерянный луч

Пусть A — точечный источник света. Найдём его изображение A' . Оно будет мнимым (рис. 14).

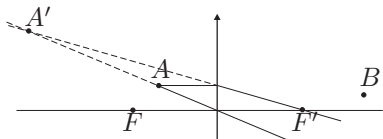


Рис. 14

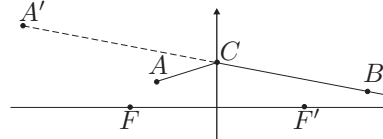


Рис. 15

Наблюдателю, находящемуся справа от линзы, будет казаться, что все лучи распространяются от точечного источника A' . Пусть прямая $A'B$ пересекает плоскость линзы в точке C (рис. 15), тогда AC и CB — части искомого луча.

Задача 4. Запутанная схема

Перерисуем исходную схему в несколько ином виде (рис. 16).

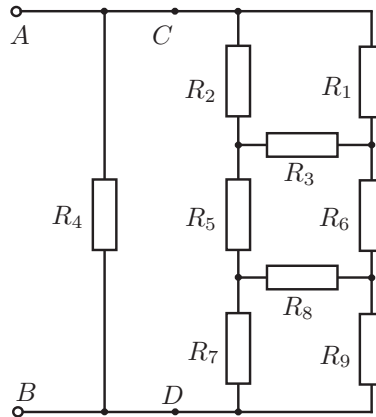


Рис. 16

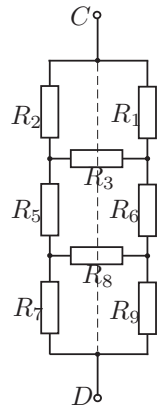


Рис. 17

Можно представить R_{AB} как два параллельно соединённых резистора R_4 и R_{CD} . В силу симметрии схемы относительно оси CD (рис. 17), ток через резисторы R_3 и R_8 течь не может, так как направления движения носителей слева направо и справа налево эквивалентны. Следовательно, эти резисторы можно исключить из схемы. Тогда $R_{CD} = 3R/2 = 7,5$ Ом,

$$R_{AB} = \frac{R_4 R_{CD}}{R_4 + R_{CD}} = 3 \text{ Ом.}$$

10 класс

Задача 1. Проводящая сфера

Присоединим источник тока к полюсам сферы. Поскольку ρ не зависит от долготы, параллели будут эквипотенциальны. Поэтому сферу можно рассматривать как набор последовательно соединённых колец, получаемых при разрезании сферы по параллелям.

Найдём сопротивление кольца между двумя близкими параллелями:

$$\Delta r = \frac{\rho R \Delta \varphi}{h \cdot 2\pi R \cos \varphi} = \frac{\rho_0 \Delta \varphi}{2\pi h}.$$

Здесь $\Delta \varphi$ — угловое расстояние между двумя близкими параллелями, выраженное в радианах, причем $\Delta \varphi \ll 1$. Полное сопротивление между полюсами складывается из сопротивлений последовательно соединённых колец:

$$r = N \cdot \Delta r = \frac{\pi}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\rho_0 \Delta \varphi}{2\pi h} = \frac{\rho_0}{2h} = 1 \text{ Ом.}$$

Задача 2. Хоккеист на карусели

Рассмотрим движение шайбы относительно Земли. Выберем начало координат в центре карусели, ось Ox — по направлению к шайбе в момент удара, ось Oy — в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси Ox . В данной системе отсчета шайба движется прямолинейно и равномерно. Обозначим проекции скорости шайбы на координатные оси через v_x и v_y .

В первом приближении можно считать, что участок карусели вблизи хоккеиста в начальный момент времени движется вдоль оси Oy со скоростью ωR_0 . Для того, чтобы шайба оставила на карусели след, направленный вдоль оси Ox (как показано на рисунке), необходимо, чтобы проекция скорости шайбы на ось Oy также равнялась ωR_0 , то есть $v_y = 5$ м/с.

Более удаленные от центра участки карусели движутся с большей скоростью, поэтому след шайбы не будет точно прямолинейным. Действительно, точка карусели, находившаяся в начальный момент времени на оси Ox на расстоянии $R_0 + a$ от центра, сместится в направлении оси Oy за время t на расстояние $\omega(R_0 + a)t$, шайба же сместится лишь на расстояние $\omega R_0 t$. Это проявляется в смещении следа шайбы вниз на расстояние $\omega a t$. Подставляя вместо t время a/v_x , необходимое шайбе для смещения на расстояние a в горизонтальном направлении, получаем, что вертикальное смещение следа шайбы равно $b = \omega a^2 / v_x$.

Как видно из рисунка, данного в условии, при $a = 2,5$ м $b = 0,25$ м, а при $a = 5$ м $b = 1$ м. Отсюда получаем: $\omega / v_x = 0,04 \text{ м}^{-1}$.

Окончательно, скорость шайбы и ее проекции относительно Земли:

$$v_x = 12,5 \text{ м/с}, \quad v_y = 5 \text{ м/с}, \quad v \approx 13,5 \text{ м/с.}$$

Начальная скорость шайбы относительно хоккеиста была направлена от центра карусели и равна 12,5 м/с.

Задача 3. Ломаная

Рассмотри отдельно случаи собирающей и рассеивающей линз.

1. *Собирающая линза.* Все лучи, вышедшие из точки в фокальной плоскости, после линзы идут параллельно. Поэтому через точки A и B проведем прямые, параллельные преломленному и падающему лучам соответственно (рис. 18). Луч AK не преломился, следовательно он прошел через оптический центр линзы. Аналогично, луч BE прошел через тот же центр. Следовательно, точка O их пересечения является оптическим центром линзы. Через точку P преломления луча и точку O проведем прямую, которая будет пересечением плоскости линзы и плоскости рисунка. Прямая MN , перпендикулярная PO и проходящая через точку O , является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN .

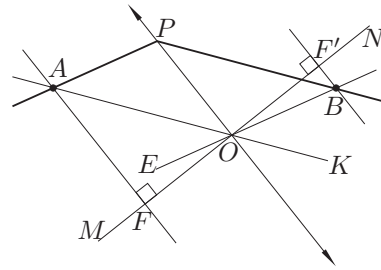


Рис. 18

2. *Рассеивающая линза.* Плоскость линзы расположена посередине между фокальными плоскостями и параллельна им. Поэтому точка C (середина отрезка AB) находится в плоскости линзы (рис. 19). Через точку P преломления луча и точку C проведем прямую, которая будет пересечением плоскости линзы и плоскости рисунка. Через точки A и B проведем прямые, параллельные PC . Они являются пересечениями фокальных плоскостей с плоскостью рисунка. Продолжим луч PB до пересечения с фокальной плоскостью в точке D . Изображение точки A в линзе находится на отрезке DP . Можно показать, что оно будет на расстоянии $f/2$ от линзы, где f — ее фокусное расстояние. Следовательно, мнимым изображением точки A является точка A' — середина DP . Луч AK не преломляется, значит, он проходит через оптический центр O линзы, которым является точка пересечения прямой AL с плоскостью линзы. Прямая MN , перпендикулярная PO и проходящая через точку O , является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN .

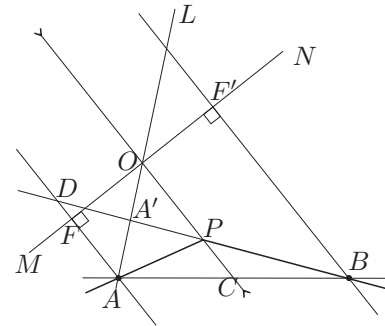


Рис. 19

Задача 4. Химическая реакция

Пусть вещества X и Y в количестве 3ν и 2ν соответственно находятся при температуре $T_z^{\text{пл}}$. И пусть мы хотим получить из них вещество Z при температуре $T_z^{\text{кип}}$, причем так, чтобы половина его была в жидком состоянии, а половина — в газообразном. В соответствии с данными в условии результатами двух опытов это можно сделать, например, следующими двумя способами. Можно сначала провести химическую реакцию, а затем, нагревая полученное вещество Z , довести его до конечного состояния. А можно первоначально нагреть вещества X и Y до температуры $T_z^{\text{кип}}$, а потом провести химическую

реакцию. Оба процесса имеют одинаковые начальные и конечные состояния и идут при постоянном давлении, поэтому подводимое тепло в них одинаково:

$$\frac{\nu}{2}\lambda_z + \nu C_z(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}}) + \frac{\nu}{2}r_z = (3\nu C_x + 2\nu C_y)(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}}),$$

откуда

$$C_z = 3C_x + 2C_y - \frac{\lambda_z + r_z}{2(T_z^{\text{кип}} - T_z^{\text{пл}})} = 200 \text{ кДж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К}).$$

Примечание. Температура вещества Z после реакций, указанных в условии, окажется $T_z^{\text{пл}}$ и $T_z^{\text{кип}}$, так как в сосуде будут находиться в равновесии два агрегатных состояния вещества Z . Заметим, что из неравенств для температур плавления и кипения следует, что вещества X и Y не претерпевают фазовых переходов, а находятся все время в жидком состоянии. При парообразовании объем увеличивается, а значит, совершается работа против сил внешнего давления, но эта работа учтена в значении r_z .

Задача 5. Емкости

Как видно из графиков, через время порядка 5τ после замыкания ключа заряд распределяется примерно поровну между конденсаторами, и это состояние сохраняется в течение времени порядка 100τ . Следовательно,

$$C_1 = C, \quad R_2 \gg R_1.$$

То есть, рассматривая процессы при $t \sim \tau$, можно пренебречь сопротивлением R_2 . Из первого графика видно, что при $t < \tau$ заряд на конденсаторе C_1 линейно возрастает со временем:

$$I_1 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{Q_0}{2\tau}.$$

С другой стороны:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{Q_0}{CR_1},$$

откуда

$$R_1 = \frac{2\tau}{C}.$$

В дальнейшем конденсаторы C и C_1 разряжаются через резистор R_2 . Из второго графика видно, что при $t \sim 100\tau$ заряд на конденсаторе C_1 линейно уменьшается со временем:

$$I_2 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = -\frac{Q_0}{2000\tau}.$$

С другой стороны ток через резистор R_2 вдвое больше I_2 , так как разряжаются оба конденсатора:

$$2I_2 = \frac{U}{R_2} = -\frac{Q_0}{2CR_2},$$

откуда

$$R_2 = \frac{500\tau}{C}.$$

11 класс

Задача 1. Катюшка

Допустим, что существует масса m_0 такая, что для массы груза $m > m_0$ катушка начнет проскальзывать. При массе груза $m = m_0$ (рис. 20):

$$F_1 = \mu_1 N_1, \quad F_2 = \mu_2 N_2. \quad (1), (2)$$

Запишем для катушки второй закон Ньютона в проекции на координатные оси:

$$Ox: \quad F_2 - N_1 = 0, \quad (3)$$

$$Oy: \quad N_2 + F_1 - Mg - T = 0. \quad (4)$$

Натяжение нити

$$T = m_0 g. \quad (5)$$

Момент приложенных к катушке сил относительно полюса O , лежащего на оси катушки, равен нулю, так как катушка находится в равновесии:

$$Tr - F_1 r - F_2 R = 0. \quad (6)$$

Решая систему уравнений (1) – (6), получим:

$$m_0 = M \frac{\mu_2(1 + \frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R} - \mu_2}.$$

Таким образом, если $\mu_2 < \frac{r}{R}$, то система будет в равновесии при

$$m < m_0 = M \frac{\mu_2(1 + \frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R} - \mu_2},$$

а при $m > m_0$ катушка будет вращаться.

Если увеличивать μ_2 , приближая его к r/R , то m_0 будет неограниченно возрастать; при $\mu_2 = r/R$ система находится в равновесии при любых m . При $\mu_2 \geq r/R$ равновесие не нарушится ни при каком m .

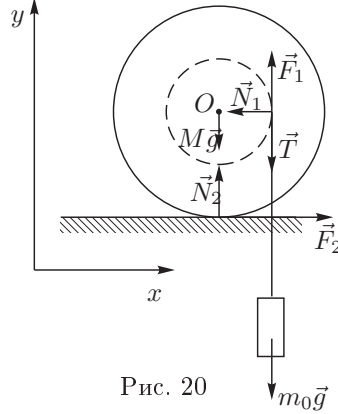


Рис. 20

Задача 2. Сопротивление воздуха

Как вытекает из условия задачи, сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала по сравнению с силой тяжести. Поэтому при вычислении работы силы сопротивления в первом приближении можно считать, что скорость тела на высоте z равна $\sqrt{v_0^2 - 2gz}$. Следовательно, сила сопротивления зависит от высоты z следующим образом:

$$F_{\text{сопр}} = \alpha(v_0^2 - 2gz)^{k/2},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Потеря кинетической энергии равна удвоенной работе сил сопротивления воздуха на участке от высоты 0 до высоты $v_0^2/2g$: $\Delta E = -2A$.

Разобьем участок $0 \leq z \leq \frac{v_0^2}{2g}$ на большое число N маленьких участков длиной $\Delta z = \frac{v_0^2}{2gN}$ точками $z_j = \frac{v_0^2}{2g} \frac{j}{N}$. Тогда

$$A = \alpha \sum_{j=1}^N (v_0^2 - 2gz_j)^{k/2} \Delta z = \alpha \frac{v_0^{k+2}}{2g} \sum_{j=1}^N (1 - j/N)^{k/2} \frac{j}{N}.$$

Следовательно, $A \sim v_0^{k+2}$.

Таким образом, при уменьшении начальной скорости в 2 раза потери энергии уменьшатся в 2^{k+2} раз, а начальная энергия — в 4 раза. Следовательно, при начальной скорости $v_0/2$ тело потеряет энергию $\Delta E = 2^{-k} \varepsilon E_0$, где E_0 — начальная энергия.

Задача 3. Игрушечный поезд

В двигателе постоянного тока установлен постоянный магнит, в поле которого вращается ротор. ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через рамку, поэтому напряжение на клеммах двигателя пропорционально скорости движения поезда: $U = U_0 v/v_0$. Мощность, которую вырабатывает двигатель работающий в режиме генератора, целиком выделяется на резисторе (трением пренебрегаем) и определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P = U \frac{U}{R} = \frac{U_0^2}{R v_0^2} v^2. \quad (1)$$

Легко заметить, что формула (1) означает, что тормозящая сила пропорциональна скорости:

$$F = -\frac{U_0^2}{R v_0^2} v.$$

Таким образом, полный импульс силы за время торможения и тормозной путь связаны следующим соотношением:

$$mv_0 = \frac{U_0^2}{R v_0^2} L, \quad L = \frac{R m v_0^3}{U_0^2} = 8 \text{ мм}.$$

Задача 4. Три точки

Плоскость линзы расположена посередине между фокальными плоскостями и параллельна им. Поэтому точка C (середина отрезка AB) находится в плоскости линзы (рис. 21). Проведем прямую OC , которая будет пересечением плоскости линзы с плоскостью рисунка. Прямая MN , перпендикулярная OC и проходящая через точку O , является главной оптической осью линзы. Фокусы линзы — основания перпендикуляров, опущенных из A и B на MN . Заметим, что задача не имеет однозначного решения, так как линза может быть как собирающей, так и рассеивающей.

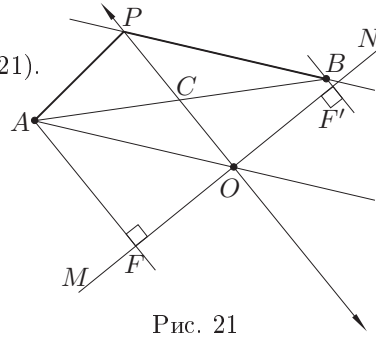


Рис. 21

1. *Собирающая линза.* Проведем преломляющийся луч AO и прямую BP , параллельную AO . Луч AB преломляется в точке P , так как A — точка в фокальной плоскости, то есть все лучи из A после линзы идут параллельно. Таким образом, ход искомого луча APB восстановлен.

2. *Рассеивающая линза.* Из формулы тонкой линзы следует, что мнимое изображение A' точки A будет на расстоянии $f/2$ от линзы, где f — фокусное расстояние, то есть оно будет в середине отрезка AO . Продолжение любого преломленного луча, вышедшего из A , будет проходить через точку A' . Проведем прямую BA' . В точке P ее пересечения с плоскостью линзы луч AB преломляется. Таким образом, ход искомого луча APB восстановлен (рис. 22).

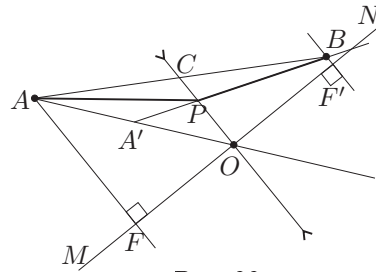


Рис. 22

Задача 5. Циклический процесс

Рассмотрим сначала процесс качественно. В начальный момент при температуре t_1 в сосуде находится смесь воды и ее насыщенных паров. В процессе изотермического расширения вся вода испаряется, и пар становится ненасыщенным. В ходе изобарического сжатия температура пара начинает уменьшаться до некоторого значения T_{min} . При достижении этой температуры пар становится насыщенным, и дальнейшее изобарическое сжатие происходит при этой минимальной температуре. При последующем изотермическом сжатии насыщенного пара его давление изменяться не будет. Наконец, после изохорического нагревания содержимого сосуда система вода-пар возвращается в исходное состояние. Таким образом, рассматриваемый круговой процесс на pV -диаграмме имеет вид (рис. 23).

Из данного в условии графика $p_{нас}(t)$ находим начальное давление $p_1 = 40$ кПа. Из того же графика находим температуру, соответствующую давлению насыщенных паров $p_2 = p_1/2$. Это будет минимальная температура во всем процессе: $T_{min} = 333$ К = 60°C . Максимальной температурой является начальная температура $T_{max} = T_1 = 349$ К = 76°C .

Массу впрыснутой воды найдем из уравнения состояния, например, для точки 2, в которой точно нет жидкой фазы:

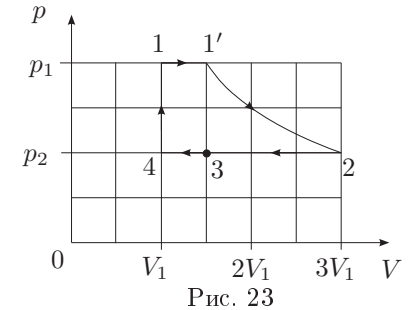


Рис. 23

$$p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2, \quad m = \frac{p_2 V_2 \mu}{RT_2} = \frac{3 p_1 V_1 \mu}{2 RT_1} \approx 19 \text{ г.}$$

Работа пара в цикле равна сумме работ на каждом участке:

$$A = A_{11'} + A_{1'2} + A_{234} + A_{41}.$$

В точке $1'$ вода полностью испаряется, а на участке $1' - 2$ пар ведет себя как идеальный газ, при этом объем в точке $1'$ равен $3V_1/2$, что следует из уравнений состояния, записанных для точек $1'$ и 2. Имеем:

$$A_{11'} = p_1 \left(\frac{3}{2} V_1 - V_1 \right) = \frac{1}{2} p_1 V_1, \quad A_{1'2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{3V_1}{\frac{3}{2}V_1} = \frac{3}{2} p_1 V_1 \ln 2,$$

$$A_{234} = -\frac{p_1}{2} (3V_1 - V_1) = -p_1 V_1, \quad A_{41} = 0.$$

Отсюда $A = \frac{1}{2} p_1 V_1 (3 \ln 2 - 1) \approx 1$ кДж.