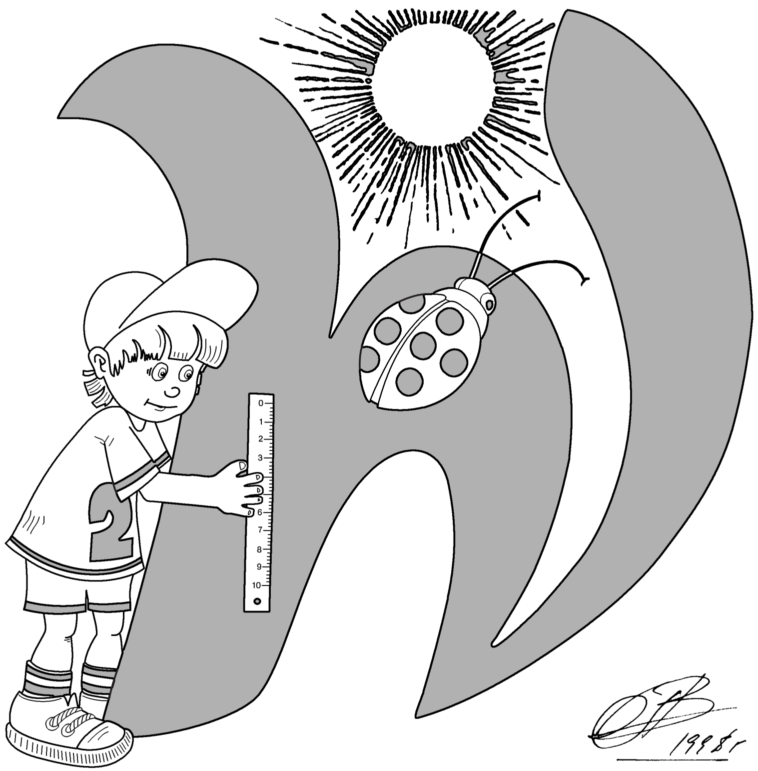
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2003/2004 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Варгин А.	1. Варгин А.	1. Чудновский А.
2. Варгин А.	2. Слободянин В.	2. Шведов О.
3. Шведов О.	3. Шведов О.	3. Чудновский А.
4. Шведов О.	4. Варгин А.	4. Чивилев В.
	5. Шведов О.	5. Чудновский А.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Мельниковский Л.	Чивилев В.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В., Чудновский А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Самокотин А., Ильин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:43.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Встреча посередине

С противоположных концов однородного изначально неподвижного бруска длиной L, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, навстречу друг другу пустили две маленькие шайбы. Массы шайб $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$, их начальные скорости $v_1 = v_0$ и $v_2 = 2v_0$; коэффициенты трения скольжения между бруском и шайбами одинаковы. Шайбы столкнулись на середине бруска через время $\tau = 0{,}4L/v_0$, имея при этом ненулевые скорости относительно бруска. Найдите массу бруска M и коэффициент трения скольжения шайб по бруску k. Ускорение свободного падения равно g. Будет ли задача иметь решение, если $\tau = 0{,}2L/v_0$? $\tau = L/v_0$? Ответ обоснуйте.

Задача 2. Коническая пробка

В дне сосуда имеется сужающееся отверстие, плотно закрытое конической пробкой (рис. 1). Площадь основания пробки S, высота L. Уровень дна сосуда пересекает конус на половине его высоты. Плотности пробки и жидкости составляют ρ_0 и ρ соответственно. Какой должна быть высота уровня жидкости $H > 0$ над основанием конуса, чтобы пробка не всплывала? Какую минимальную внешнюю силу F, направленную вверх, нужно в этом случае приложить к пробке, чтобы ее вытащить?

Примечание. Объем конуса $V = LS/3$.

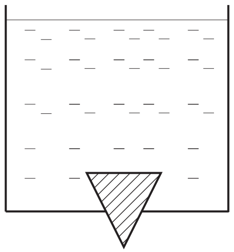


Рис. 1

Задача 3. Беспокойный шарик

В одном калориметре находится смесь воды и льда, в другом — вода при температуре 100°C. Горячую воду начинают охлаждать следующим образом: маленький металлический шарик на нити опускают в холодную воду, затем переносят в горячую, затем опять в холодную и т.д. При этом каждый раз успевает установиться тепловое равновесие, а весь цикл занимает одно и то же время. График зависимости массы льда в «холодном» калориметре от времени изображен на рисунке 2. До какой температуры охладилась горячая вода, когда весь лед растаял? Теплообменом с атмосферой можно пренебречь.

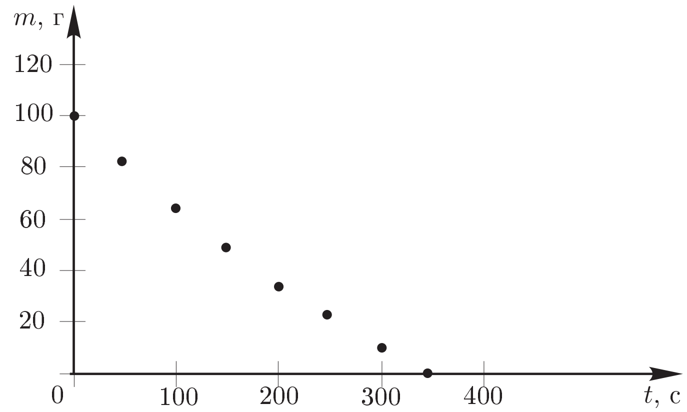


Рис. 2

Задача 4. Новый элемент

Исследуя неизвестный элемент X, экспериментатор Глюк определил его ВАХ (вольтамперную характеристику) (рис. 3). Он решил сконструировать из элемента X и двух резисторов новый элемент Y с ВАХ, у которой сила тока прямо пропорциональна напряжению при $0 \leqslant U \leqslant 3U_0$. В точке $(3U_0; 2I_0)$ происходит излом ВАХ и зависимость I от U становится более сложной линейной функцией. Изобразите все принципиально различные схемы элемента Y, определите сопротивления резисторов в этих схемах и изобразите соответствующие ВАХ элемента Y.

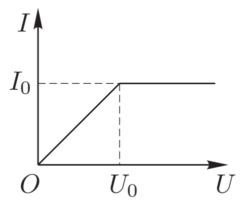


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Поршень на пружине

Отверстие в дне сосуда закрыто поршнем, состоящим из цилиндра длиной L и радиусом R и полусферы того же радиуса (рис. 4). Поршень может перемещаться вертикально без трения. Пружиной жесткостью k поршень прикреплен к неподвижному основанию. В сосуд наливают жидкость плотностью ρ, после чего верхняя точка поршня оказывается на глубине h под поверхностью воды, а толщина слоя воды в сосуде H. На какое расстояние x переместится поршень по сравнению с его положением в пустом сосуде?

Примечание. Объем шара $V = 4\pi R^3/3$.

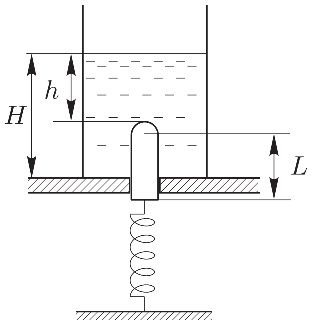


Рис. 4

Задача 2. Рассеяние атомов мишени

Атомы A летят вдоль оси цилиндрического канала радиусом R и сталкиваются с практически неподвижными атомами B. Кинетическая энергия атомов A равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула AB, которая далее движется со скоростью v. При нецентральном ударе реакция не идет, то есть атомы сталкиваются упруго. За какое минимальное время t после столкновения атомы сорта B могут попасть на стенку канала?

Задача 3. Бозе-конденсация

Явление накапливания частиц в основном состоянии с энергией $\varepsilon = 0$ называют *конденсацией Бозе-Эйнштейна*. Подчеркнем, что речь может при этом идти разве что о «конденсации в импульсном пространстве», никакой реальной конденсации в газе, конечно, не происходит.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц *Статистическая физика* ч.1.

Шведская Королевская Академия Наук решила присудить Нобелевскую Премию по физике 2001 года «За получение конденсата Бозе-Эйнштейна в разреженных газах щелочных металлов и ранние фундаментальные исследования свойств этих конденсатов» совместно Эрику Б.Корнеллу, Вольфгангу Кеттерле и Карлу Е.Виману.

The Nobel Foundation. Press Release:
The 2001 Nobel Prize in Physics

Для описания некоторых систем используется модель идеального бозе-газа. При температурах ниже определенной (называемой температурой Бозе-Эйнштейновской конденсации) внутренняя энергия моля такого газа определяется выражением $U = (3/2)AVT^{5/2}$, а давление не зависит от объема и равно $p = AT^{5/2}$, где A — некоторая константа. В этих условиях над газом совершают такой процесс расширения, что $TV^{\lambda} = \mathrm{const}$, где λ — заданное число. Поглощается или отдается теплота газом в этом процессе?

Примечание. При $\mu x \ll 1$ справедлива формула $(1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu x$.

Задача 4. Шарики в поле

Два маленьких шарика диаметром d, массой m и зарядами $+Q$ и $-Q$ движутся в пространстве, взаимодействуя только между собой. В некоторый момент они оказались на расстоянии L_0 друг от друга, причем первый из них был неподвижен, а скорость второго v_0 была направлена в сторону первого. Найдите максимальное расстояние L разлета шариков после абсолютно упругого удара (общая кинетическая энергия шариков непосредственно перед и сразу после удара одинакова). За время удара заряды шариков изменились и стали равными $+q$ и $-q$. Считайте, что в каждый момент времени заряд шарика распределен по его объему равномерно.

Задача 5. Посеребренная линза

Сферическую поверхность плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием F_1 посеребрили. Если на выпуклую сторону такой системы направить пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то отраженные лучи будут распространяться так, как будто они были испущены из точки F'', находящейся на расстоянии F_2 от линзы (рис. 5). Найдите построением точку F (фокус системы), в которой сойдется пучок лучей, параллельных главной оптической оси и падающих на плоскую поверхность линзы. Выразите фокусное расстояние F_0 системы через F_1 и F_2. Фокусное расстояние линзы много больше её диаметра, а посеребренная поверхность полностью отражает свет.

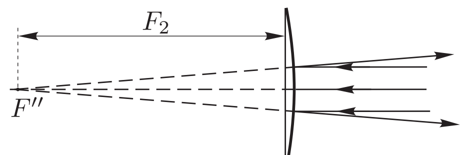


Рис. 5

11 класс

Задача 1. Слоненок

1. Проволока изогнута в форме окружности (рис. 6) и зафиксирована. Вдоль нее может двигаться маленькая бусинка. На бусинку действуют силы только со стороны проволоки. Вдоль прямой проволоки бусинка движется равномерно, а при движении по криволинейному участку возникает сила трения скольжения с коэффициентом $\mu = 0{,}05$. В начальный момент бусинка находилась в точке A и имела скорость $v_0 = 1$ м/с. Найдите скорость v_1 бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке.

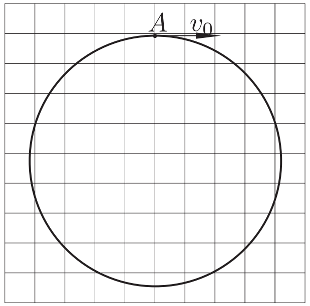


Рис. 6

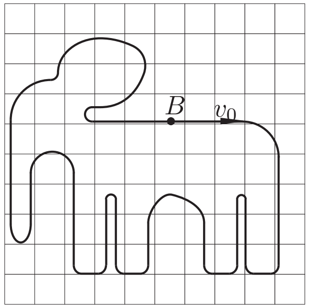


Рис. 7

2. Пусть теперь проволока имеет форму плоской замкнутой кривой (рис. 7). Найдите в этом случае скорость v_2 бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке B. Ответы требуется представлять в аналитическом и численном видах.

Задача 2. Неидеальный газ

Экспериментатор Глюк исследовал неизвестный газ и обнаружил, что он подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона лишь приближенно. Зависимость его давления p от температуры T, объема V и количества молей ν можно описать формулой

$$p = \frac{\nu RT}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}(bT - a),$$

где a и b — малые параметры. Глюк предположил, что выражение для внутренней энергии U также немного отличается от формулы в случае идеального газа и имеет вид:

$$U = \frac{3}{2}\nu RT - \frac{c\nu^2}{V}.$$

Размышляя над различными способами измерения коэффициента c, Глюк вспомнил, что КПД цикла Карно зависит только от температур нагревателя и холодильника. Используя это утверждение, он определил значение коэффициента c без проведения измерений. Найдите c, считая известными a и b.

Задача 3. Заряженный дирижабль

Дирижабль завис над гористой местностью. Из-за естественной ионизации у воздуха имеется некоторая проводимость. Электрический заряд дирижабля уменьшается в 2 раза за каждые $\tau = 10$ мин. Найдите удельное сопротивление ρ воздуха.

Задача 4. «Пифагоровы штаны»

Из одного куска нихромовой проволоки спаяли прямоугольный треугольник с катетами длиной $3a$ и $4a$. К трем сторонам проволочного треугольника подсоединили небольшие по размерам вольтметры так, что соединительные провода и стороны треугольника образуют квадраты (рис. 8). Вся конструкция находится в одной плоскости, перпендикулярно которой направлено однородное магнитное поле. Индукция поля изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t = k > 0$. Сопротивления вольтметров намного больше сопротивления сторон треугольника. Найдите показания вольтметров.

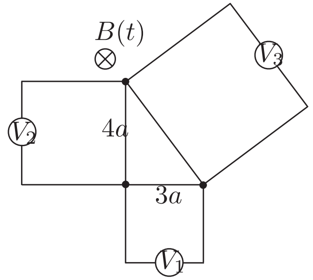


Рис. 8

Задача 5. Композитная линза

Оптическая система, состоящая из двух тонких двояковыпуклых линз с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей, изменяет диаметр падающего на систему пучка параллельных лучей в γ раза, оставляя пучок параллельным после прохождения системы. Если поместить линзы в глицерин, то линзы останутся собирающими, но их фокусные расстояния увеличатся в α и β раз ($\alpha < \beta$). Каждая из линз была составлена из двух одинаковых плосковыпуклых линз. Их разняли и половинки разных линз соединили вместе (рис. 9). Во сколько раз увеличится фокусное расстояние композитной линзы, если ее поместить в глицерин?

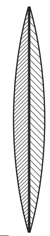


Рис. 9

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Встреча посередине

Совместим начало координат неподвижной системы отсчета с исходным положением первой шайбы и направим ось Ox к другой шайбе. Поскольку по условию обе шайбы имеют ненулевые скорости относительно бруска, на них действуют силы трения скольжения; при этом ускорения шайб в проекции на ось Ox равны $a_{1x} = -kg$ и $a_{2x} = kg$. На брусок со стороны шайб также действуют силы трения, проекции которых на ось Ox равны $F_{1x} = kmg$ и $F_{2x} = -2kmg$. Результирующая сила равна $F_x = -kmg$; она сообщает бруску ускорение $a_x = -kmg/M$.

Через время τ после начала движения координаты шайб будут равны

$$x_1(\tau) = v_0\tau - \frac{kg\tau^2}{2}; \qquad x_2(\tau) = L - 2v_0\tau + \frac{kg\tau^2}{2};$$

а координата края бруска, находившегося в начале координат,

$$x(\tau) = -\frac{kmg}{M}\frac{\tau^2}{2}.$$

По условию задачи,

$$x_1(\tau) = x_2(\tau); \qquad x_1(\tau) - x(\tau) = L/2.$$

Из первого соотношения можно найти k, из второго M:

$$k = \frac{3v_0\tau - L}{g\tau^2}, \qquad M = m\frac{3v_0\tau - L}{v_0\tau}. \tag{1}$$

Однако приведенные рассуждения справедливы только в том случае, если ни одна из шайб не прекратила своего движения относительно бруска.

Поскольку для скоростей шайб и бруска имеем

$$v_{1x}(\tau) = v_0 - kg\tau, \qquad v_{2x}(\tau) = -2v_0 + kg\tau,$$

$$v_x(\tau) = -\frac{kmg}{M}\tau,$$

должны выполняться условия

$$v_0 - kg\tau > -\frac{kmg}{M}\tau > -2v_0 + kg\tau,$$

или

$$L > v_0\tau, \qquad L > 2v_0\tau. \tag{2}$$

Кроме того, коэффициент трения k должен быть положителен, то есть

$$L < 3v_0\tau. \tag{3}$$

Условия (2) и (3) при $\tau = 0{,}4L/v_0$ выполнены, поэтому

$$k = \frac{v_0^2}{0{,}8gL}; \qquad M = \frac{m}{2}.$$

При $\tau = 0{,}2L/v_0$ не выполнено условие (3) (коэффициент трения оказывается отрицателен), при $\tau = L/v_0$ — нарушается условие (2) (шайбы не могут встретиться на середине бруска, имея ненулевые скорости относительно бруска). Следовательно, в этих двух случаях задача не имеет решения.

Задача 2. Коническая пробка

Представим себе, что верхняя часть пробки полностью погружена в жидкость, которая может подтекать и под эту половину. Тогда на эту воображаемую половину пробки со стороны жидкости действовали бы:

- сила давления на верхнюю поверхность F_1 (направлена вниз);
- равнодействующая сил давления на боковую поверхность F_3 (направлена вверх);
- сила давления на нижнюю поверхность $F_2 = \rho g(H + \frac{L}{2})\frac{S}{4}$ (направлена вверх).

По закону Архимеда, суммарная сила, действующая на воображаемую половину пробки, была бы равна

$$F_A' = \rho g V' = \rho g\frac{7}{8}\frac{LS}{3} = F_2 + F_3 - F_1,$$

Где V' — объём верхней части пробки.

Однако в реальности на пробку со стороны жидкости действуют только силы F_1 и F_3. Их равнодействующая

$$R = F_3 - F_1 = F_2 - \rho g\frac{7}{8}\frac{LS}{3} = \rho g S\left(\frac{H}{4} - \frac{L}{6}\right).$$

Пробка не будет всплывать, если сумма силы тяжести и равнодействующей R направлена вниз, т.е.

$$\rho g S\left(\frac{H}{4} - \frac{L}{6}\right) + \rho_0 g\frac{LS}{3} \geqslant 0.$$

Это условие можно записать как

$$H \geqslant \frac{2}{3}L\left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho}\right).$$

Если $2\rho_0 > \rho$, пробка не всплывет при любом неотрицательном значении H.

Чтобы вытащить пробку, нужно приложить минимальную силу

$$F = \rho g S\left(\frac{H}{4} - \frac{L}{6}\right) + \rho_0 g\frac{LS}{3}.$$

Задача 3. Беспокойный шарик

На каждом шаге, продолжительность которого обозначим через τ, металлический шарик нагревается в горячем калориметре, отбирая у него теплоту, и охлаждается в холодном, отдавая теплоту. Обозначим через T_1 и T_2 температуры калориметров, а через C — теплоемкость шарика. Тогда на каждом шаге горячий калориметр отдает теплоту $C(T_1 - T_2)$, а холодный получит такое же количество теплоты. Оно пойдет на плавление льда массой

$$-\Delta m = \frac{C}{\lambda}(T_1 - T_2)$$

(λ — удельная теплота плавления льда). Следовательно, лед плавится со скоростью

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{C}{\lambda\tau}(T_1 - T_2),$$

которая оказывается пропорциональной разности температур калориметров.

Апроксимируем начало графика $m(t)$ в условии задачи прямой. Ее угловой коэффициент $k_1 = -0{,}4$ г/с. Вблизи точки графика, где $m = 0$, его можно заменить прямой с угловым коэффициентом $k_2 = -0{,}2$ г/с.

Поскольку в начальный момент времени разность температур равна 100°C, конечная точка соответствует разности температур 50°C. Следовательно, когда весь лед растает, горячая вода охладится до 50°C.

Задача 4. Новый элемент

Возможны только две схемы элемента Y (рис. 10 и 11).

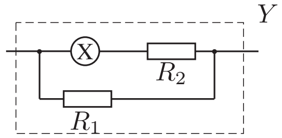


Рис. 10

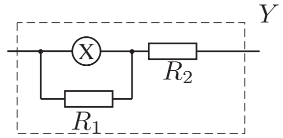


Рис. 11

Если напряжение U_x на элементе X мало ($U_x < U_0$), можно использовать законы последовательного и параллельного соединения резисторов. Тогда сила тока I через элемент Y оказывается пропорциональна напряжению U на нем. Однако при $U_x > U_0$ сила тока I перестает быть прямо пропорциональна напряжению U. В этом случае (рис. 10) силы токов через резисторы R_1 и R_2 равны соответственно U/R_1 и I_0, откуда $I = U/R_1 + I_0$. При $U = 3U_0$ получаем: напряжение на резисторе R_1 равно $U_1 = 3U_0$; напряжение на элементе X равно U_0; напряжение на резисторе R_2 равно $U_2 = 3U_0 - U_0 = 2U_0$; ток через элемент X и резистор R_2 равен $I_2 = I_0$; ток через резистор R_1 равен $I_1 = 2I_0 - I_0 = I_0$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 3\frac{U_0}{I_0} = 3R_0; \qquad R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 2\frac{U_0}{I_0} = 2R_0,$$

где $R_0 = U_0/I_0$. ВАХ этого элемента приведена на рис. 12:

Аналогично, для цепи (рис. 11) силы токов через резисторы R_2 и R_1 равны соответственно I и $I - I_0$, а напряжения на них составляют IR_2 и $(I - I_0)R_1$, откуда $U = IR_2 + (I - I_0)R_1$.

При $U = 3U_0$ имеем: напряжение на элементе X и резисторе R_1 равно $U_1 = U_0$; напряжение на резисторе R_2 равно $U_2 = 3U_0 - U_0 = 2U_0$; ток через резистор R_2 равен $I_2 = 2I_0$; ток через элемент X равен I_0; ток через резистор R_1 равен $I_1 = 2I_0 - I_0 = I_0$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_0}{I_0} = R_0, \qquad R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_0}{I_0} = R_0.$$

ВАХ этого элемента приведена на рис. 13:

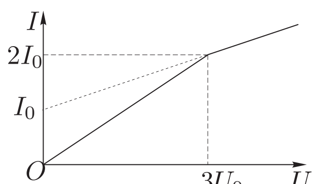


Рис. 12

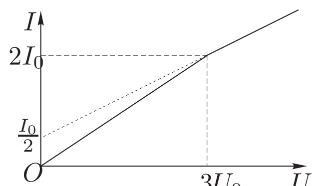


Рис. 13

10 класс

Задача 1. Поршень на пружине

Опускание поршня обусловлено весом жидкости над ним:

$$kx = \rho V g,$$

где объем жидкости над поршнем

$$V = \pi R^2(h+R) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2\left(h + \frac{R}{3}\right).$$

Следовательно,

$$x = \frac{\pi R^2 \rho g}{k}\left(h + \frac{R}{3}\right).$$

Задача 2. Рассеяние атомов мишени

Рассмотрим нецентральный удар атомов. Проведем через центры атомов A и B ось Oy, а перпендикулярно ей через точку касания атомов ось Ox (рис. 14). Пусть α — угол между осями CC и Ox. В системе координат Oxy проекция импульса атома A на ось Ox после столкновения не изменится, поэтому достаточно рассмотреть центральный удар атома A, движущегося вдоль оси Oy с неподвижным атомом B.

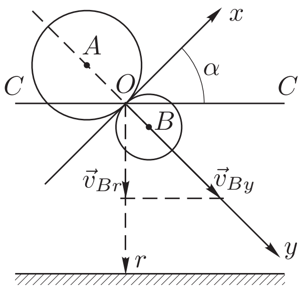


Рис. 14

Центр масс сталкивающихся атомов движется вдоль оси Oy со скоростью $v_y = v\sin\alpha$. В системе центра масс атом B до столкновения будет перемещаться против оси Oy со скоростью $-v\sin\alpha$, а после столкновения, со скоростью $v\sin\alpha$. Вернемся в систему отсчета Oxy. В ней атом B имеет скорость $v_{By} = 2v\sin\alpha$. Проекция этой скорости на радиальное направление Or равна

$$v_{Br} = v_{By}\cos\alpha = v2\sin\alpha\cos\alpha = v\sin 2\alpha.$$

Максимум скорости $v_{Br} = v$. Следовательно, искомое время $t = R/v$.

Задача 3. Бозе-конденсация

По первому закону термодинамики полученное системой количество теплоты

$$Q = \Delta U + p\Delta V.$$

Поскольку в рассматриваемом процессе $T = BV^{-\lambda}$, $B = \mathrm{const}$, имеем:

$$U = \frac{3}{2}AB^{5/2}V^{1-\frac{5}{2}\lambda}.$$

Следовательно,

$$\Delta U = \frac{3}{2}AB^{5/2}\left((V+\Delta V)^{1-\frac{5}{2}\lambda} - V^{1-\frac{5}{2}\lambda}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}AB^{5/2}V^{1-\frac{5}{2}\lambda}\left(\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\frac{5}{2}\lambda} - 1\right) \approx$$

$$\approx \frac{3}{2}AB^{5/2}V^{1-\frac{5}{2}\lambda}\left(1-\frac{5}{2}\lambda\right)\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{5}{2}\lambda\right)AT^{5/2}\Delta V.$$

Далее,

$$p\Delta V = AT^{5/2}\Delta V.$$

Отсюда

$$Q = \frac{3}{2}AT^{5/2}\Delta V\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{2}\lambda\right),$$

так что

$$Q > 0, \qquad \text{если} \qquad \lambda < 2/3;$$

$$Q < 0, \qquad \text{если} \qquad \lambda > 2/3;$$

при $\lambda = 2/3$ процесс будет адиабатическим.

Задача 4. Шарики в поле

Перейдем в систему центра масс шариков. В ней они летят навстречу друг другу со скоростями $v_0/2$. Кинетическая энергия обоих шариков непосредственно перед соударением определяется начальной кинетической энергией и изменением электрической потенциальной энергии:

$$E_1 = 2\frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + kQ^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L_0}\right).$$

Общая кинетическая энергия шариков сразу после соударения $E_2 = E_1$.

Разлет шариков будет происходить уже в другом электрическом поле. Допустим шарики разлетятся на *конечное* максимальное расстояние, тогда их скорости в момент максимального удаления будут нулевыми:

$$E_2 = kq^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L}\right).$$

Из записанных уравнений находим

$$L = \frac{L_0}{\frac{Q^2}{q^2} - \frac{L_0}{d}\left(\frac{Q^2}{q^2} - 1\right) - \frac{mv_0^2 L_0}{4kq^2}}.$$

Если знаменатель окажется отрицательным или равным нулю, то шарики разлетятся на бесконечное расстояние.

Задача 5. Посеребренная линза

Пустим на линзу пучок параллельных лучей, составляющих с главной оптической осью системы малый угол α. После прохождения линзы лучи окажутся направленными в точку A, отстоящую от линзы на расстоянии F_1.

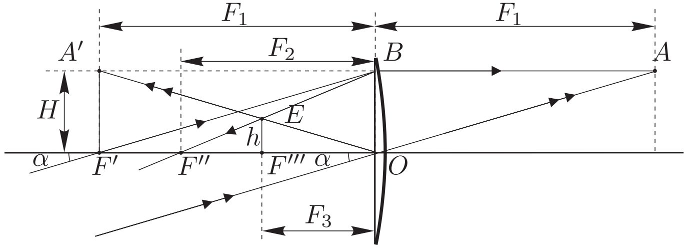


Рис. 15

Теперь рассмотрим отражение лучей BA и OA от сферического зеркала. Луч BA повернется к точке F'', а луч OA, отразившись от полюса O зеркала, пройдет через точку A', находящейся над фокусом F' линзы на высоте H (рис. 15). Выразим расстояние F_3 от точки E, лежащей на пересечении отражённых лучей, до плоскости линзы через F_1 и F_2. Пусть расстояние от точки E до главной оптической оси системы равно h. Тогда

$$\frac{H}{h} = \frac{F_1}{F_3} = \frac{F_2}{F_2 - F_3}, \qquad \text{отсюда} \qquad \frac{1}{F_3} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

В точке E пересеклись бы все лучи, отразившиеся от зеркала, но на их пути вновь оказывается линза. После того как лучи пройдут сквозь нее, они пересекутся в точке C, лежащей в фокальной плоскости системы. Найдем её фокусное расстояние F_0. Для этого рассмотрим лучи DE и OE, падающие на линзу от зеркала (рис. 16). Луч OE проходит через оптический центр линзы, следовательно он не изменит своего направления. Пусть луч DE распространяется параллельно главной оптической оси, тогда он повернет к точке F'. Обозначим расстояние от главной оптической оси до точки C через h'. Тогда

$$\frac{h}{h'} = \frac{F_1}{F_1 - F_0} = \frac{F_3}{F_0}, \qquad \text{отсюда} \qquad \frac{1}{F_0} = \frac{2}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

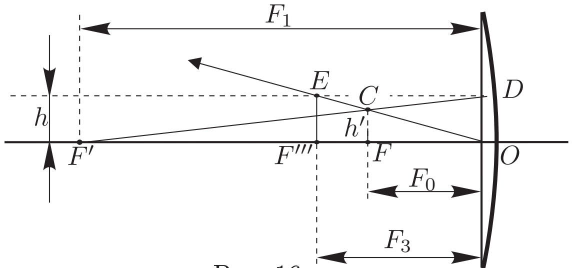


Рис. 16

11 класс

Задача 1. Слоненок

Запишем второй закон Ньютона для торможения бусинки на малом участке проволоки с радиусом кривизны R:

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu m\frac{v^2}{R}.$$

Пусть φ — угловой путь бусинки, тогда его малое приращение

$$d\varphi = |\omega|dt = \frac{v}{R}dt,$$

где ω — угловая скорость бусинки. Отметим, что знак модуля соответствует определению углового пути (а не перемещения). Исключая R из приведенных уравнений, получим

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\varphi,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-\mu\varphi}.$$

При вычислении углового пути φ следует складывать все угловые отклонения вектора скорости бусинки без учета направления отклонения. По заданным рисункам находим, что вектор скорости бусинки пройдет соответственно угловые пути $\varphi_1 = 2\pi$ и $\varphi_2 = 13\pi$ прежде, чем бусинка снова окажется в исходной точке, откуда

$$v_1 = v_0 e^{-\mu\varphi_1} = 0{,}73 \text{ м/с}, \qquad v_2 = v_0 e^{-\mu\varphi_2} = 0{,}13 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Неидеальный газ

Рассмотрим малый цикл Карно 1234 (рис. 17). При $\Delta T \ll T$ и $\Delta V \ll V$ можно приближенно считать, что совершенная в этом цикле работа равна площади $123'4'$ и пренебречь разностью площадей треугольников $144'$ и $233'$. Поскольку расстояние между изотермами вдоль изохоры

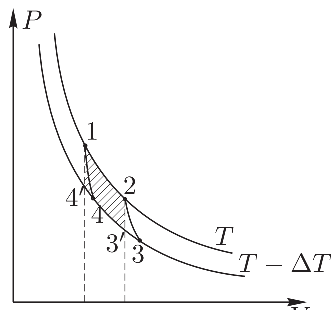


Рис. 17

$$\Delta p = \Delta T\left(\frac{\nu R}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}b\right),$$

то площадь параллелограмма $123'4'$ соответствует работе

$$A = \Delta p\Delta V = \Delta T\left(\frac{\nu R}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}b\right)\Delta V.$$

КПД цикла Карно
$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{\Delta T}{T},$$
откуда теплота, полученная от нагревателя,
$$Q_+ = T\left(\frac{\nu R}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}b\right)\Delta V.$$

Согласно первому закону термодинамики $Q_+ = U_2 - U_1 + A_+$, причем работа газа на изотерме T
$$A_+ = \left(\frac{\nu RT}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}(bT - a)\right)\Delta V.$$
Следовательно,
$$U_2 - U_1 = Q_+ - A_+ = a\frac{\nu^2}{V^2}\Delta V.$$
По формуле для внутренней энергии из условия
$$U_2 - U_1 = a\nu^2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) \approx c\frac{\nu^2}{V^2}\Delta V.$$
Сравнивая последние два выражения, находим $c = a$.

Задача 3. Заряженный дирижабль

Заряд дирижабля зависит от времени следующим образом:
$$q = q_0 2^{-t/\tau},$$
где q_0 — начальный заряд.

Дирижабль разряжается током
$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{\ln 2}{\tau}q. \tag{1}$$

Можно показать, что в произвольной точке проводящей среды справедлива следующая связь между плотностью тока j, напряженностью электрического поля E и удельным сопротивлением ρ среды:
$$j = \frac{E}{\rho}.$$
Для вывода этой связи возьмем маленький цилиндр длины L и площадью основания S, расположенный вдоль силовой линии поля. Напряжение между торцами цилиндра $U = EL$, его сопротивление $R = \rho L/S$. Поэтому
$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{EL}{(\rho L/S)S} = \frac{E}{\rho}.$$

Окружим мысленно дирижабль замкнутой поверхностью, расположенной вблизи дирижабля. Через малый элемент ΔS_k этой поверхности идет ток
$$\Delta I_k = j_k \Delta S_k = \frac{E_k}{\rho}\Delta S_k,$$
где E_k — напряженность электрического поля, перпендикулярная этому элементу. Суммирование по всем элементам дает
$$\sum \Delta I_k = \frac{1}{\rho}\sum E_k \Delta S_k.$$
Поскольку $\sum \Delta I_k = I$, а по теореме Гаусса $\sum E\Delta S_k = q/\varepsilon_0$, то
$$I = \frac{q}{\varepsilon_0 \rho}. \tag{2}$$
Из (1) и (2) находим
$$\rho = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \ln 2} \approx 10^{14}\ \text{Ом}\cdot\text{м}.$$

Задача 4. «Пифагоровы штаны»

ЭДС в проволочном треугольном контуре направлена против часовой стрелки и равна $\mathscr{E} = 6ka^2$. Пусть сопротивления сторон треугольника равны $3R$, $4R$ и $5R$. Тогда ток в треугольнике
$$I = \frac{\mathscr{E}}{3R + 4R + 5R} = \frac{ka^2}{2R}$$
и направлен против часовой стрелки.

Токи через вольтметры намного меньше I. ЭДС в контуре в виде квадрата со стороной $3a$ равна $\mathscr{E}_1 = 9ka^2$ и «направлена» против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа для этого контура $\mathscr{E}_1 = U_1 - 3RI$. С учетом выражений для $\mathscr{E}_1$ и I находим показания вольтметра V_1:
$$U_1 = \mathscr{E}_1 + 3RI = \frac{21}{2}ka^2.$$
Аналогично находим показания вольтметров V_2 и V_3:
$$U_2 = 18ka^2, \qquad U_3 = \frac{55}{2}ka^2.$$

Задача 5. Композитная линза

Пусть D_1 и D_2 — оптические силы двух исходных линз, D — композитной линзы. Фокусные расстояния линз связаны с их оптическими силами обратной зависимостью:

$$f_1 = \frac{1}{D_1}, \qquad f_2 = \frac{1}{D_2}, \qquad f = \frac{1}{D}.$$

Из условий $f_1' = \alpha f_1$ и $f_2' = \beta f_2$ выразим оптические силы линз в жидкости:

$$D_1' = \frac{D_1}{\alpha}, \qquad D_2' = \frac{D_2}{\beta}.$$

Диаметр проходящего через оптическую систему из двух линз пучка параллельных лучей изменится в γ раз, если линзы имеют общую точку фокуса (телескопическая система) и их оптические силы отличаются в γ раз:

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma \qquad \text{или} \qquad \frac{D_2}{D_1} = \gamma.$$

Линза с меньшей оптической силой изменяет ее в большее число раз при помещении в оптически более плотную среду, поэтому из $\beta > \alpha$ следует $D_2 < D_1$, то есть

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma > 1.$$

Если линзы приложены одна к другой, то их оптические силы складываются. В качестве линз можно рассматривать половинки исходных линз, следовательно,

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \qquad D' = \frac{D_1' + D_2'}{2}.$$

Подставляя выражения для D_1' и D_2' и используя соотношение между D_1 и D_2, находим

$$\frac{f'}{f} = \frac{D}{D'} = \frac{D_1 + D_2}{D_1' + D_2'} = \frac{\alpha\beta(\gamma + 1)}{\alpha + \beta\gamma}.$$

Для заметок